Математика и Математическое моделирование
Сетевое научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана
http://mathm.elpub.ru

Ссылка на статью:
// Математика и математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2017. № 2. С. 39–51.
DOI: **10.24108/mathm.0217.0000068**

Представлена в редакцию: 06.05.2017
Исправлена: 21.05.2017

УДК 517.977

Элементы анизотропийного анализа линейных стационарных систем

Белов И. Р.[1,2,*]

[*] ivanb1993@mail.ru

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
[2]ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

В статье рассматривается анализ систем управления, на вход которых поступают сигналы с ограниченной «цветностью». Для анализа данных систем используются понятия и методы одного из разделов робастной теории управления — анизотропийной теории управления. Следуя родоначальнику этой теории И.Г. Владимирову вводятся понятия анизотропии случайного сигнала, средней анизотропии случайной последовательности и анизотропийной нормы системы. Программная реализация методов вычисления анизотропийной нормы выполнена с помощью среды MATLAB. Результаты вычислений для заданной дискретной системы приведены в виде графиков.

Ключевые слова: энтропия; анизотропия; норма; дискретная система; цветной шум

Введение

Большинство динамических систем в реальных условиях испытывает на себе влияние множества внешних факторов и возмущений. Следовательно, при решении задачи управления поведением систем необходимо учитывать и внешние возмущения. Закон управления может быть синтезирован с целью полного подавления любых внешних воздействий или для ограничения воздействий с целью поддержания заданного значения измеряемой величины. Для решения подобных задач необходимо исследовать степень воздействия на характеристики системы различных внешних возмущений. Для этого вводятся такие понятия, как относительная энтропия и средняя анизотропия последовательности случайных величин. В данной работе исследуются способы вычисления относительной энтропии и средней анизотропии последовательности, а также основной характеристики системы — анизотропийной нормы. Также в данной работе рассматриваются и реализуются различные методы вычисления анизотропийной нормы системы (в частотной и временной областях). В качестве объекта исследования рассматривается дискретная система третьего порядка.

1. Средняя анизотропия последовательности в пространстве состояний

Теоретические выкладки. Для введения понятия анизотропии случайного вектора необходимо описать класс векторов, которые будут в дальнейшем объектом рассмотрения. Пусть $\mathbb{L}_2^m$ — класс m-мерных интегрируемых с квадратом случайных векторов с распределениями P, такими, что $P \ll \mathcal{V}$, где $\mathcal{V}$ — m-мерный объем. Таким образом, из равенства $\mathcal{V}(A) = 0$ следует равенство $P(A) = 0$ для некоторого множества A. Пусть $V \in \mathbb{L}_2^m$ — случайный вектор с нормальной плотностью вероятности

$$p_{m,\lambda}(x) = (2\pi\lambda)^{-m/2} \exp\Big(-\frac{|x|^2}{2\lambda}\Big), \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

а $W \in \mathbb{L}_2^m$ — случайный вектор с произвольной плотностью распределения f, такой, что для некоторого $x \in \mathbb{R}^m$ из условия $p_{m,\lambda}(x) = 0$ следует $f(x) = 0$. Выпишем формулу для относительной энтропии вектора W относительно вектора V:

$$D(f\,||\,p_{m,\lambda}) = \frac{m}{2}\ln(2\pi\lambda) + \frac{E[|W|^2]}{2\lambda} - h(W), \tag{1}$$

где $E[|W|^2] = E[W^TW] = \operatorname{tr} E[W^TW]$ — след ковариационной матрицы вектора W, а

$$h(W) = -\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)\ln f(x)\,d\mathcal{V} \quad —$$

дифференциальная энтропия. Вывод формулы (1) приведен в [1]. Видно, что при изменении параметров m и λ распределения случайного вектора V меняется значение относительной энтропии. Согласно [7], анизотропией $A(W)$ случайного m-мерного вектора W называют минимальное по параметру $\lambda \geq 0$ значение относительной энтропии $D(f\,||\,p_{m,\lambda})$, т.е. минимальное в смысле λ расстояние до класса гауссовских случайных векторов с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей λI_m:

$$A(W) \triangleq \min_{\lambda>0} D(f\,||\,p_{m,\lambda}).$$

Для последовательности случайных величин вычислить анизотропию согласно данному определению невозможно, так как при неограниченном возрастании количества элементов анизотропия стремится к бесконечности. Вследствие этого возникает необходимость усреднения по времени, где вступают в силу свойства стационарности и эргодичности [1].

Пусть $\{\omega_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — бесконечная в обе стороны строго стационарная эргодическая последовательность векторов из $\mathbb{L}_2^m$ — класса m-мерных интегрируемых квадратом случайных сигналов с распределениями P, такими, что P линейно зависима относительно $\mathcal{V}$, где $\mathcal{V}$ — m-мерный объем в $\mathbb{R}^m$. Расширенный вектор последовательности обозначим через

$$W_{s:t} \doteq \begin{pmatrix} \omega_s \\ \omega_{s+1} \\ \dots \\ \omega_t \end{pmatrix} \in \mathbb{L}_2^{t-s+1}.$$

Определение 1. Средней анизотропией последовательности $W = \{\omega_k\}_{k=0,1,\ldots}$ называют предел

$$\overline{A}(W) \triangleq \lim_{N\to+\infty} \frac{A(W_{0:N-1})}{N}.$$

Для дальнейших рассуждений выпишем определения норм в пространствах функций $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$.

Определение 2. $\mathcal{H}_2$-норма передаточной функции $P(z) \in \mathcal{H}_2^{p\times m}$ определяется выражением

$$\|P\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{tr}(P^*(\mathrm{e}^{i\omega})\,P(\mathrm{e}^{i\omega}))\,d\omega\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $P^*(\mathrm{e}^{i\omega}) = P^T(\mathrm{e}^{-i\omega})$ — передаточная функция сопряженной системы; $\mathcal{H}_2^{p\times m}$ — пространство Харди комплекснозначных матричных функций, аналитичных внутри единичного круга.

Определение 3. $\mathcal{H}_\infty$-норма передаточной функции $P(z) \in \mathcal{H}_\infty^{p\times m}$ определяется выражением

$$\|P\|_\infty = \sup_{\omega\in[0;2\pi]} \sigma_{\max}(P(\mathrm{e}^{i\omega})),$$

где $\sigma_{\max}(A) = \sqrt{\max_j |\lambda_j(A^TA)|}$ — максимальное собственное значение A.

Пусть $V = \{\upsilon_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — последовательность m-мерных гауссовских векторов с нулевым средним $E[\upsilon_k] = 0$ и единичной ковариационной матрицей $\mathrm{cov}(\upsilon_k) = I_m$. Предположим, что случайная последовательность W получается из V с помощью формирующего фильтра

$$\omega_j = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k \upsilon_{j-k}, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Передаточная функция фильтра G равна

$$G(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k z^k, \quad g_k \in \mathbb{R}^{m\times m}, \tag{3}$$

и принадлежит пространству Харди $\mathcal{H}_2^{m\times m}$ комплекснозначных матричных функций, аналитичных внутри открытого единичного диска $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| < 1\}$. Показано [2], что среднюю анизотропию последовательности W можно вычислить следующим образом:

$$\overline{A}(W) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\det\frac{mS(\omega)}{\|G\|_2^2}d\omega, \tag{4}$$

где $S(\omega) = \widehat{G}^*(\omega)\,\widehat{G}(\omega)$, $-\pi \le \omega < \pi$, — спектральная плотность W; $(\cdot)^* = \overline{(\cdot)}^T$ — транспонирование комплексно сопряженной матрицы; $\widehat{G}(\omega) \doteq \lim\limits_{r\to1-0} G(re^{i\omega})$ — значение передаточной функции $G(z)$ на границе единичного круга.

Иногда наряду с обозначением средней анизотропии последовательности $\overline{A}(W)$ используют обозначение $\overline{A}(G)$, подразумевая, что формирующий фильтр G генерирует последовательность W. Функционал (4) всегда неотрицателен и принимает конечное значение, если матричная функция формирующего фильтра G имеет полный ранг. Вычисление средней анизотропии по формуле (4) подразумевает знание численных характеристик последовательности векторов $\{\omega_k\}$, таких как математическое ожидание и ковариационная матрица. На практике чаще применяется подход, основанный на рассмотрении системы с известными составляющими, выходом которой является окрашенная (прошедшая через фильтр) последовательность $\{\omega_k\}$, а входом — гауссовский белый шум $\{\upsilon_k\}$. Иными словами, пусть формирующий фильтр $G \in \mathcal{H}_2^{m\times m}$ описывается линейной дискретной системой

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + B\upsilon_k, \\ \omega_k = Cx_k + D\upsilon_k, \end{cases} \tag{5}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{m\times m}$ — матрицы с вещественными коэффициентами, причем все собственные значения матрицы A лежат внутри единичной окружности, т.е.

$$\rho(A) \triangleq \max_{k=\overline{0,n}}\{|\lambda_k(A)|\} < 1,$$

а матрица D — невырожденная. Введем более удобное представление данной системы:

$$G \sim \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right),$$

С описанной выше системой будем отождествлять передаточную функцию

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D.$$

Теорема 1 ([1]). Пусть формирующий фильтр G, генерирующий последовательность $\{\omega_k\}$ гауссовских векторов, имеет представление в виде (5) в пространстве состояний, матрица A с собственными значениями внутри единичного круга, а D — невырожденная. Тогда средняя анизотропия последовательности W представима в виде

$$\overline{A}(W) = -\frac{1}{2}\ln\det\left(\frac{m\Theta}{\mathrm{tr}(CPC^T + DD^T)}\right), \tag{6}$$

где матрица Θ выражается в терминах решения R уравнения Риккати

$$R = ARA^T + BB^T - \Lambda\Theta\Lambda^T, \quad \Lambda \doteq (ARC^T + BD^T)\Theta^{-1}, \quad \Theta \doteq CRC^T + DD^T, \tag{7}$$

а P есть матрица Грама управляемости фильтра, удовлетворяющий уравнению

$$P = APA^T + BB^T. \tag{8}$$

Численный пример. Используя данную теорему, найдем среднюю анизотропию для выходной последовательности векторов W, полученной из входных векторов V с помощью фильтра, описываемого линейной дискретной системой, имеющей следующий вид

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + B\upsilon_k, \\ \omega_k = Cx_k + D\upsilon_k, \end{cases} \tag{9}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0.45 & 0.5 & 0.36 \\ 0.5 & -0.15 & 0.3 \\ -0.54 & 0.64 & 0.55 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0 \\ -1.5 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 2 \quad 1.5), \quad D = 1.5.$$

Решая уравнения (7) и (8), получаем матрицы Θ и P:

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0.2255 & -0.02745 & -0.4665 \\ -0.02745 & 0.003341 & 0.05679 \\ -0.4665 & 0.05679 & 0.9653 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1.077 & 0.03617 & -1.449 \\ 0.03617 & 0.01835 & 0.02249 \\ -1.449 & 0.02249 & 2.286 \end{pmatrix}.$$

Подставив полученные Θ и P в (6), получим следующее значение средней анизотропии в пространстве состояний:

$$\overline{A}(W) = 0.1243.$$

Чтобы показать наглядно воздействие фильтра на входной гауссовский сигнал, реализуем данную дискретную систему с помощью среды MATLAB. В качестве сигнала V на вход поступает гауссовский одномерный сигнал с нулевым средним и единичной дисперсией. На рис. 1 представлен график, на котором изображены зависимости входного сигнала V и выходного сигнала W от времени t. По графику видно, что амплитуда выходного сигнала заметно выше, чем у входного.

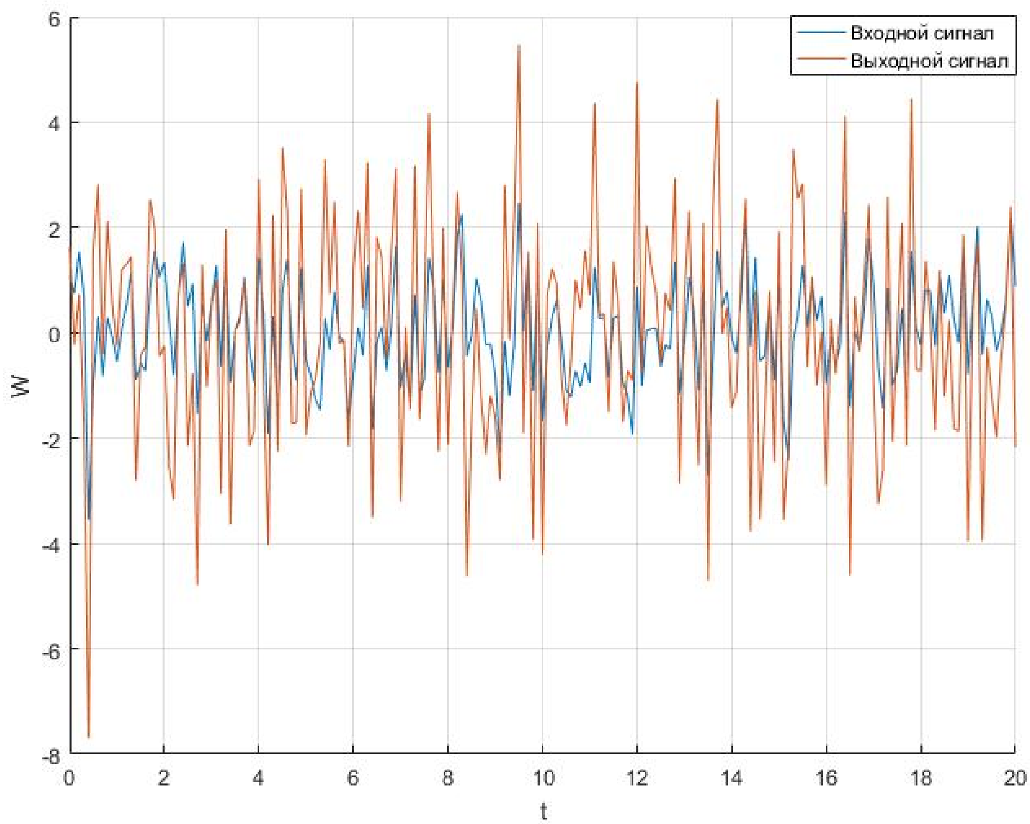

Рис. 1. Входной и выходной сигналы дискретной системы

2. Понятие анизотропийной нормы дискретной системы

В задаче $\mathcal{H}_2$-оптимального управления входом линейной системы является гауссовский белый шум $\{\upsilon_k\}$, который обусловливает использование $\mathcal{H}_2$-нормы в качестве функционала качества. В задаче $\mathcal{H}_\infty$-оптимального управления на вход системы подается ограниченное детерминированное воздействие, определяющее использование $\mathcal{H}_\infty$-нормы в роли функционала качества. При подаче на линейную систему цветного шума $\{\omega_k\}$, сформированного фильтром (5), возникает необходимость использовать новый функционал качества и новую норму, называемую анизотропийной нормой и обладающая свойствами как $\mathcal{H}_2$-нормы, так и $\mathcal{H}_\infty$-нормы.

Пусть $V = \{\upsilon_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — m-мерный гауссовский белый шум, а векторы ω_k получены из υ_k с помощью формирующего фильтра (2) с представлениями

во временной области

$$\omega_j = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k \upsilon_{j-k}, \quad j \in \mathbb{Z};$$

в частотной области

$$W(z) = G(z)V(z), \quad j \in \mathbb{C}.$$

Пусть также F — линейная стационарная система, на вход которой поступает последовательность $\{\omega_k\}$, а выходом является последовательность $\{z_k\}$, $z_k \in \mathbb{R}^p$, для которой справедливо представление $Z(z) = F(z)W(z)$ в частотной области, где $F(z)$ — матричная передаточная функция системы, аналитичная в открытом единичном круге $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| < 1\}$. Обозначим через

$$G_a \doteq \Big\{G \in \mathcal{H}_2^{m\times m}\colon\ \overline{A}(W) \le a\Big\}$$

множество формирующих фильтров G, генерирующих случайные сигналы W со средней анизотропией, не превышающей заданный параметр $a \ge 0$.

Определение 4. Анизотропийной нормой системы F называют супремум отношения 2-нормы выхода к 2-норме входа по всем окрашенным последовательностям $\{\omega_k\}$ с уровнем средней анизотропии не более a:

$$|\!|\!| F |\!|\!|_a \triangleq \sup_{G\in\mathbb{G}_a} \frac{\|FG\|_2}{\|G\|_2}. \tag{10}$$

При фиксированной системе $F \in \mathcal{H}_\infty^{p\times m}$ величина $|\!|\!| F |\!|\!|_a$ является непрерывной неубывающей по a функцией, для которой справедлива следующее утверждение.

Лемма 1 ([1]). Значение a-анизотропийной нормы системы F с m-мерным выходом лежит между масштабированной $\mathcal{H}_2$-нормой и $\mathcal{H}_\infty$-нормой:

$$\frac{\|F\|_2}{\sqrt{m}} \le |\!|\!| F |\!|\!|_a \le \|F\|_\infty.$$

Доказательство леммы основано на асимптотике анизотропийной нормы системы $F \in \mathcal{H}_\infty^{p\times m}$ при стремлении значения средней анизотропии $\overline{A}(W)$ случайной последовательности к нулю и бесконечности соответственно. Подробнее асимптотика описана в [3].

3. Анизотропийная норма системы в частотной области

В соответствии с формулой (10) определим множество наихудших формирующих фильтров

$$\mathbb{G}_a^\diamond = \arg\max_{G\in\mathbb{G}_a} \frac{\|FG\|_2}{\|G\|_2}. \tag{11}$$

В приведенной ниже теореме заданное множество будет охарактеризовано с использованием следующих обозначений. Пусть $\lambda_{\max}(\Lambda) = \|F\|_\infty^2$ — максимальное собственное число матрицы $\Lambda(\omega) = \widehat{F}^*(\omega)\widehat{F}(\omega)$. Тогда функция

$$R(q,\omega) = q\Sigma(q,\omega) = (q^{-1}I_m - \Lambda(\omega))^{-1}$$

представляет собой резольвенту матрицы $\Lambda(\omega)$ и определена при $q^{-1} \in (\lambda_{\max}(\Lambda), +\infty)$, $\omega \in [-\pi,\pi]$. Введем функции

$$\mathcal{A}(q) = \frac{m}{2}(\ln\Phi(q) - \Psi(q)) \tag{12}$$

и

$$\mathcal{N}(q) = \left(\frac{1}{q}\left(1 - \frac{1}{\Phi(q)}\right)\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{13}$$

где

$$\Phi(q) = \frac{1}{2\pi m}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{tr}\Sigma(q,\omega)\,d\omega, \quad \Psi(q) = \frac{1}{2\pi m}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\det\Sigma(q,\omega)\,d\omega.$$

Функции (12) и (13) являются аналитическими на множестве $q \in [0, \|F\|_\infty^2]$. Для введенных функций справедливы следующие равенства

$$\overline{A}(W) = \mathcal{A}(q), \quad \frac{\|FG\|_2}{\|G\|_2} = \mathcal{N}(q), \quad \|G\|_2^2 = m\Phi(q). \tag{14}$$

Теорема 2 ([4]). Пусть система $F \in \mathcal{H}_\infty^{p\times m}$ удовлетворяет условию $\|F\|_2/\sqrt{m} < \|F\|_\infty$. Тогда для любого $a \geq 0$ верны следующие утверждения:

1) a-анизотропийная норма системы с помощью новых функций может быть представлена равенством

$$|\!|\!|F|\!|\!|_a = \mathcal{N}(\mathcal{A}^{-1}(a));$$

2) любой фильтр $G \in \mathcal{H}_2^{m\times m}$, для которого $\widehat{G}^*(\omega)\widehat{G}(\omega) = \Sigma(q,\omega)$ при $q = \mathcal{A}^{-1}(a)$, принадлежит семейству наихудших формирующих фильтров (11).

Доказательство этой теоремы приведено в [1]. Воспользовавшись формулами (12), (13) и доказанной выше теоремой, вычислим анизотропийную норму системы (9) в зависимости от среднего уровня анизотропии a (рис. 2).

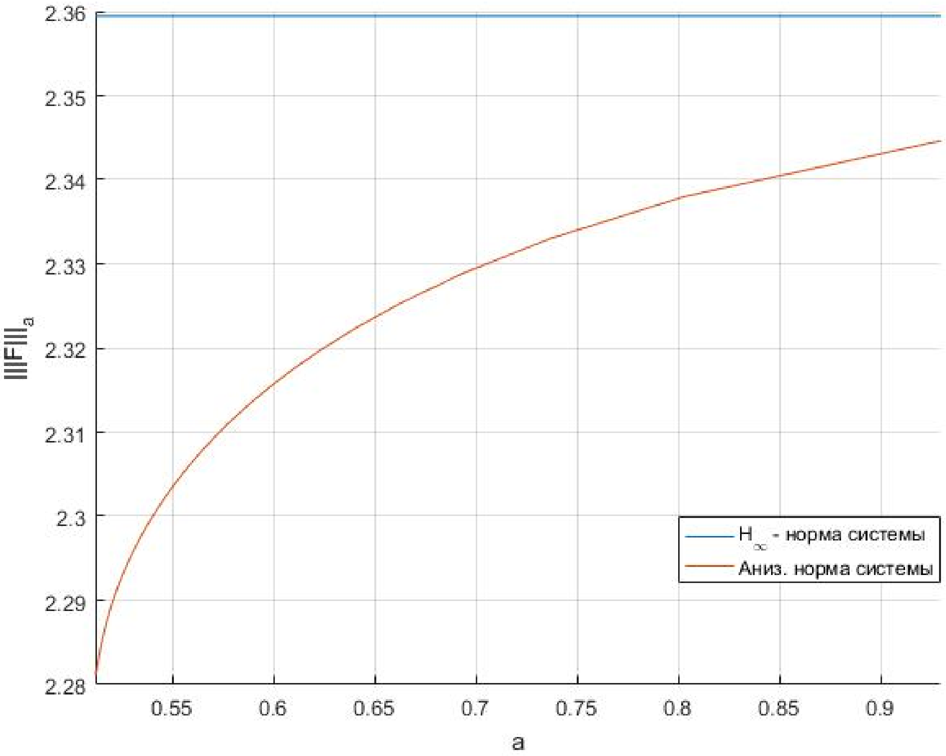

Рис. 2. Анизотропийная норма системы от среднего уровня анизотропии

По графику видно, что при увеличении уровня средней анизотропии a анизотропийная норма $|||F|||_a$ стремится к $\mathcal{H}_\infty$-норме системы, вычисленной с помощью математических пакетов среды MATLAB.

4. Анизотропийная нормы системы в пространстве состояний

Чаще всего системы, описывающие объект управления, заданы в пространстве состояний. Поэтому лучше пользоваться формулами для анизотропийной нормы линейной системы, описывающей объект управления. Пусть система $F \in \mathcal{H}_\infty^{p\times m}$ имеет вид

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + B\omega_k, \\ z_k = Cx_k + D\omega_k, \end{cases}$$

или

$$F \sim \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right), \tag{15}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{m\times m}$, причем матрица A асимптотически устойчива. Пусть формирующий фильтр имеет вид

$$G \sim \left(\begin{array}{c|c} \widetilde{A} & \widetilde{B} \\ \hline L & \Sigma^{1/2} \end{array}\right),$$

причем верхняя подсистема фильтра тождественна верхней подсистеме объекта. Тогда простыми выкладками проверяется, что

$$G \sim \left(\begin{array}{c|c} A+BL & B\Sigma^{1/2} \\ \hline L & \Sigma^{1/2} \end{array} \right), \tag{16}$$

Матрица $L \in \mathbb{R}^{m\times n}$ должна быть такой, что матрица $(A + BL)$ асимптотически устойчива, а матрица $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times m}$ должна быть положительно определенной и симметричной.

Теорема 3 ([5]). Для асимптотически устойчивой системы (15) средняя анизотропия сигнала W, сформированного с помощью фильтра (16), имеет вид

$$\overline{A}(W) = -\frac{1}{2}\ln\det\left(\frac{m\Sigma}{\mathrm{tr}(LPL^T + \Sigma)}\right),$$

где $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — матрица Грама управляемости фильтра G, удовлетворяющий уравнению Ляпунова

$$P = (A + BL)P(A + BL)^T + B\Sigma B^T.$$

В предыдущем разделе для вычисления анизотропийной нормы были введены функции $\mathcal{A}(q)$, $\mathcal{N}(q)$, $\Phi(q)$, $\Psi(q)$, для которых справедливы соотношения (14). Используя полученное в теореме 3 выражение для средней анизотропии $\overline{A}(W)$, необходимо найти выражения этих функций в пространстве состояний для системы (15). Для этого воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 4. Для асимптотически устойчивой системы (15) функции $\mathcal{A}(q)$, $\mathcal{N}(q)$, $\Phi(q)$ и $\Psi(q)$ явно задаются следующими выражениями

$$\mathcal{A}(q) = -\frac{1}{2}\ln\det\left(\frac{m\Sigma}{\mathrm{tr}(LPL^T + \Sigma)}\right), \quad \mathcal{N}(q) = \left(\frac{1}{q}\left(1 - \frac{m}{\mathrm{tr}(LPL^T + \Sigma)}\right)\right)^{1/2},$$

$$\Phi(q) = \frac{1}{m}\,\mathrm{tr}(LPL^T + \Sigma), \quad \Psi(q) = \frac{1}{m}\ln\det\Sigma,$$

где матрицы L и Σ соответствуют допустимому решению R уравнения Риккати

$$R = A^TRA + qC^TC + L^T\Sigma^{-1}L, \quad L = \Sigma(B^TRA + qD^TC), \quad \Sigma = (I_m - B^TRB - qD^TD)^{-1},$$

для любого $q \in [0, \|F\|_\infty^2]$, а матрица P есть матрица Грама управляемости, удовлетворяющий уравнению Ляпунова

$$P = (A + BL)P(A + BL)^T + B\Sigma B^T.$$

Воспользовавшись теоремой 4 и алгоритмом нахождения точного значения анизотропийной нормы, подробно описанном в [4], вычислим значения анизотропийной нормы в зависимости от средней анизотропии a для системы (9) с помощью математических пакетов среды MATLAB (рис. 3). Из графика видно, что $|||F|||_a \to ||F||_\infty$ при $a \to \infty$.

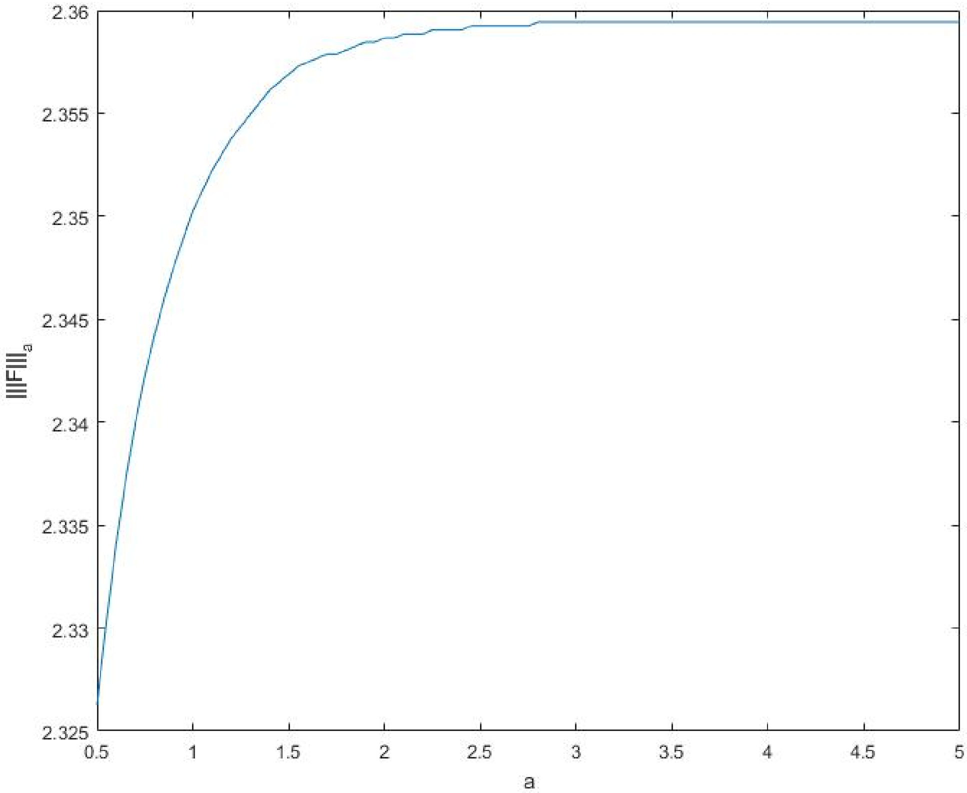

Рис. 3. Анизотропийная норма системы от средней анизотропии

Заключение

В данной работе рассмотрены основные понятия анизотропийного анализа: относительная энтропия сигнала, средняя анизотропия последовательности сигналов, анизотропийная норма дискретной системы. Представлены различные способы вычисления анизотропийной нормы для системы, описывающей объект управления. Программная реализация алгоритмов вычисления относительной энтропии сигнала, средней анизотропии последовательности и анизотропийной нормы системы разработана в среде MATLAB. В дальнейшем планируется решение задачи оптимального управления, минимизирующей анизотропийную норму системы, и сравнение результатов решения этой задачи с аналогичными результатами для H_2-и H_∞-оптимизации.

Список литературы

1. Кустов А.Ю., Курдюков А.П., Начинкина Г.Н. Стохастическая теория анизотропийного робастного управления. М.: ИПУ РАН, 2012. 127 с.

2. Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В. Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем // Доклады РАН. 1995. Т. 342, № 5. С. 583–585.

3. Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В. Асимптотика анизотропийной нормы линейных стационарных систем // Автоматика и телемеханика. 1999. № 3. С. 78–87.

4. Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V. On computing the anisotropic norm of linear discrete-time-invariant systems // 13th IFAC World Congress (San Francisco, CA, USA, July 1996): Proc. 1996. Pp. 179–184.

5. Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V. State-space solution to anisotropy-based stochastic H_∞-optimization problem // 13th IFAC World Congress (San Francisco, CA, USA, July 1996): Proc. 1996. Pp. 427–432.

6. Gray R.M. Probability, Random Processes, and Ergodic Properties. 2nd ed. Dordrecht; N.Y.: Springer, 2009. 322 p. DOI: 10.1007/978-1-4419-1090-5

7. Владимиров И.Г., Даймонд Ф., Клоеден П. Анизотропийный анализ робастного качества линейных нестационарных дискретных систем на конечном временном интервале // Автоматика и телемеханика. 2006. № 8. С. 92–111.

Mathematics & Mathematical Modelling
Electronic journal of the Bauman MSTU
http://mathm.elpub.ru

Mathematics and Mathematical Modelling of the Bauman MSTU, 2017, no. 2, pp. 39–51.
DOI: **10.24108/mathm.0217.0000068**
Received: 06.05.2017
Revised: 21.05.2017

The basics of anisotropy-based analysis of the LDTI systems

Belov I. R.[1,2,*]

[*] ivanb1993@mail.ru

[1] Bauman Moscow State Technical University, Russia
[2] Institute of Control Sciences RAS, Russia

Keywords: entropy, anisotropy, norm, LDTI, white noise

When investigating a behavior of dynamical systems, we should take into account the external noises, which have an effect on the system. The article introduces a concept of the anisotropy-based norm of the system as one of the ways to describe the measure of the effect of external disturbances on the system. The definition of the anisotropic norm includes some concepts from information theory, such as relative entropy and anisotropy. The theoretical section at the beginning of the article describes these definitions. The considered norm of the system can be evaluated in several ways. The article examines two methods — in the frequency domain and in the state space. To find the norm in the state space it is necessary to find the solution of the Riccati equation. This problem is rather laborious. So the algorithms to avoid the solution of Riccati equation are used in application of anisotropy-based norm's evaluation methods. The principle of these algorithms is replacement of Riccati equation by the system of linear matrix inequalities. The software implementation of methods under consideration is designed using the MATLAB packages. The calculation results of the anisotropy-based norm for a given linear discrete system are obtained using this program. The article presents these results as graphs.

This article enters into the Master's qualifying work "Basic quality criteria in the theory of linear systems". In this paper we consider various quality criteria, the solution of the optimal control problem for each of them, and compare the results obtained for different criteria. The anisotropy-based norm considered in the article is one of the quality criteria.

References

1. Kustov A.Yu., Kurdyukov A.P., Nachinkina G.N. *Stokhasticheskaia teoriia anizotropijnogo robastnogo upravleniia* [The stochastic theory of anisotropy-based robust control]. Moscow, 2012. 127 p. (in Russian).

2. Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semenov A.V. Anisotropy of signals and entropy of linear stationary systems. *Doklady Mathematics*, 1995, vol. 51, no. 3, pp. 388–390.
3. Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semenov A.V. Asymptotics of the anisotropic norm of linear time-independent systems. *Automation and Remote Control*, 1999, vol. 60, no. 3, pp. 359–366
4. Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V. On computing the anisotropic norm of linear discrete-time-invariant systems. *13th IFAC World Congress (San Francisco, CA, USA, July 1996): Proc.* 1996. Pp. 179–184.
5. Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V. State-space solution to anisotropy-based stochastic H_∞ optimization problem. *13th IFAC World Congress (San Francisco, CA, USA, July 1996): Proc.* 1996. Pp. 427–432.
6. Gray R.M. Probability, random processes and ergodic properties. 2nd ed. Dordrecht; N.Y.: Springer, 2009. 322 p. DOI: 10.1007/978-1-4419-1090-5
7. Vladimirov I., Diamond P., Kloeden P. Anisotropy-based robust performance analysis of finite horizon linear discrete time varying systems. *Automation and Remote Control*, 2006, vol. 67, no. 8, pp. 1265–1282. DOI: 10.1134/S0005117906080066