Математика и Математическое моделирование
Сетевое научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана
http://mathm.elpub.ru

Ссылка на статью:
// Математика и математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2017. № 2. С. 1–24.
DOI: **10.24108/mathm.0217.0000063**
Представлена в редакцию: 16.05.2017

УДК 517.984.46

О спектре периодических операторов с разбегающимися возмущениями

Головина А. М.[1,*]

[*]nastya_gm@mail.ru

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

В работе рассматривается абстрактный периодический оператор с разбегающимися возмущениями в некоторой произвольной области. Возмущениями являются произвольные абстрактные локализованные операторы. Исследуется поведение спектра возмущённого оператора, когда расстояние между областями, где локализованы возмущения, стремится к бесконечности. Доказано существование простого и изолированного собственного значения возмущённого оператора, сходящегося к простому и изолированному собственному значению предельного оператора. Построены полные асимптотические ряды для данного собственного значения и соответствующей ему собственной функции возмущённого оператора. Доказана равномерная сходимость построенных рядов и выведены явные формулы для их коэффициентов.

Ключевые слова: периодический оператор; разбегающиеся возмущения; спектр; собственные значения; собственные функции

Введение

Статей, в которых исследуются операторы с разбегающимися возмущениями, не так много (см., например, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 22, 26]). В основном внимание уделялось изучению оператора Шредингера с вещественными потенциалами (см., например, [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]). При этом потенциалы были сконцентрированы на конечных областях, причем предполагалось, что расстояния между этими областями стремятся к бесконечности, что и объясняет название таких возмущений — «разбегающиеся». История возникновения понятия «разбегающиеся возмущения» и история исследования операторов с данными возмущениями приводится в работе [18]. Имеются также статьи, в которых разбегающиеся возмущения задавались иным образом (см., например, [1, 2, 3, 17]). Большая часть цитированных статей посвящена изучению асимптотического поведения собственных значений и собственных функций. Опишем кратко результаты цитированных работ.

В статьях [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14] исследовался оператор Шредингера в пространстве R^N, $N \geqslant 1$, с несколькими разбегающимися возмущениями. Возмущениями в

[4, 5, 6, 7, 8] были потенциалы, удовлетворяющие различным условиям, обеспечивающим гладкость и убывание на бесконечности. Главными результатами являются первые члены асимптотических разложений собственных значений и соответствующих им собственных функций. В работе [8] изучалось число собственных значений возмущенного оператора в зависимости от числа собственных значений предельного оператора. В статьях [9, 10, 11] возмущениями являлись кулоновские потенциалы. Получены полные асимптотические ряды для собственных значений и соответствующих им собственных функций. Приведены оценки на коэффициенты построенных асимптотик. В [12] разбегающимися возмущениями являлись финитные потенциалы, рассматриваемые в пространстве R^N, $N = 1$ или $N = 3$. Выведены полные асимптотические разложения собственных значений и собственных функций возмущенного оператора в виде равномерно сходящихся рядов. В работах [13, 14] исследовалось поведение собственных значений, возникающих из края существенного спектра предельного оператора. Рассматривались различные случаи существования таких собственных значений. Приведено описание первых членов асимптотических разложений данных собственных значений. В статьях [15, 16] рассматривался оператор Дирака в трехмерном пространстве. В [15] возмущениями были убывающие на бесконечности потенциалы, а в [16] возмущениями являлись кулоновские потенциалы. Построены первые члены асимптотических разложений собственных значений и соответствующих им собственных функций возмущенного оператора. В работе [17] возмущающим оператором был дельта-потенциал. Получены нижние оценки для первых спектральных лакун оператора Лапласа, которые можно применить к разбегающемуся дельта-потенциалу. В статье [2] в качестве возмущения рассматривалась смена типа граничных условий. Участки границы, на которых менялся тип граничных условий, находились на большом расстоянии друг от друга. Были доказаны теоремы сходимости и построены первые члены асимптотических рядов для собственных значений и собственных функций. В [1, 3] возмущающими операторами являлись произвольные абстрактные локализованные операторы, рассматриваемые в многомерном пространстве и бесконечном цилиндре. Локализованность данных возмущений заключалась в том, что каждый из них был определен на некоторой ограниченной области. Была доказана сходимость собственных значений и собственных функций возмущенного оператора к соответствующим им собственным значениям и собственным функциям предельного оператора при произвольной кратности предельного собственного значения. Были получены первые члены асимптотических разложений собственных значений и соответствующих им собственных функций.

В работах [19, 20, 21, 22, 23] рассматривался дифференциальный эллиптический оператор с разбегающимися возмущениями в многомерном пространстве. Невозмущенным оператором был многомерный матричный самосопряженный дифференциальный оператор произвольного четного порядка достаточно общего вида. Возмущениями являлись произвольные абстрактные симметричные операторы, основным свойством которых является локализованность. Локализация возмущений описывалась весовыми функциями, которые удовлетворяют определенному набору требований. Данные требования обеспечивали гладкость весовых функций и их убывание на бесконечности. При этом практически отсутствовали ограничения на скорость убывания. Возмущения всех предыдущих работ являются частным случаем возмущений, описанных в [20, 21, 22, 23]. Даже абстрактные возмущения, описанные в [1, 3], получаются из возмущений в статьях [20, 21, 22, 23], если весовые функции выбрать финитными. Отметим, что аналогичные возмущения были рассмотрены в [27], но для другого типа задач. В качестве возмущающих операторов здесь можно было выбрать дифференциальный оператор произвольного порядка, интегральный оператор, конечномерный оператор, дельта-потенциал, псевдодифференциальный оператор. В работах [20, 21] исследовался вопрос существования возмущенного собственного значения в случае простого предельного собственного значения. Было доказано существование простого и изолированного собственного значения возмущенного оператора, сходящегося к простому и изолированному собственному значению предельного оператора. Построены полные асимптотические ряды для данного собственного значения и соответствующей ему собственной функции возмущенного оператора. Доказана равномерная сходимость построенных рядов и выведены явные формулы для их коэффициентов. В статье [19] аналогичные результаты были получены в случае кратного предельного собственного значения. В [22, 23] исследовалось поведение резольвенты возмущенного оператора, описанного в работах [20, 21, 22, 23]. Для резольвенты возмущенного оператора была выведена явная формула и на ее основе доказана равномерная резольвентная сходимость возмущенного оператора к некоторому предельному. Более подробно с результатами исследований резольвенты и спектра возмущенного дифференциального периодического оператора с разбегающимися возмущениями можно ознакомиться в [24, 25].

В работе [26] рассматривался абстрактный оператор с разбегающимися возмущениями в некоторой произвольной области. Невозмущенный оператор, в отличие от работ [20, 21, 22, 23], не предполагался дифференциальным. Данный оператор вводился как оператор в $L_2(\Omega)$ на некоторой периодической области Ω в многомерном пространстве. Условие эллиптичности в работах [20, 21, 22, 23] заменялось на выполнение некоторых априорных оценок, а условие периодичности — на коммутирование невозмущенного оператора с оператором сдвига вдоль области Ω. Еще одним отличием от [20, 21, 22, 23] являлось то, что область Ω достаточно произвольна, в то время как в [20, 21, 22, 23] в качестве такой области выбиралось многомерное пространство. Разбегающиеся возмущения определялись так же как и в статьях [20, 21, 22, 23]. Исследовалось поведение резольвенты возмущенного оператора. Выведена явная формула для резольвенты возмущенного оператора. Доказана равномерная резольвентная сходимость возмущенного оператора к некоторому предельному оператору. Приведено разложение резольвенты возмущенного оператора в полный асимптотический ряд, сходящийся в равномерной операторной норме. Довольно абстрактная постановка задачи позволила значильно расширить класс невозмущенных операторов. Так, например, невозмущенными операторами могут быть дифференциальный оператор произвольного порядка в различных периодических областях, а также интегрально-дифференциальные операторы. В третьем параграфе [26] приведены примеры таких невозмущенных и возмущающих операторов.

В настоящей работе рассматривается оператор аналогичный [26]. Исследуется поведение спектра возмущенного оператора, когда расстояние между областями, где локализованы возмущения, стремится к бесконечности. Изучается вопрос существования возмущенного собственного значения в случае простого предельного собственного значения. Доказано существование простого и изолированного собственного значения возмущенного оператора, сходящегося к простому и изолированному собственному значению предельного оператора. Построены полные асимптотические ряды для данного собственного значения и соответствующей ему собственной функции возмущенного оператора. Доказана равномерная сходимость построенных рядов и выведены явные формулы для их коэффициентов.

Опишем структуру статьи. В следующем параграфе описывается постановка задачи и формулируется основной результат. В третьем параграфе приводятся доказательство вспомогательных утверждений. Поэтапное доказательство основного результата приводится в четвертом параграфе.

1. Постановка задачи и основной результат

Обозначим через $(x_1, \ldots, x_d)$ декартовы координаты в пространстве R^d, $d \geqslant 1$, и пусть $(\overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e}_\ell)$ — набор линейно независимых векторов в пространстве R^d, где $\ell < d$. Множество всех целочисленных комбинаций, составленных из данных линейно независимых векторов будем обозначать Γ. В пространстве R^d рассмотрим область Ω инвариантную относительно сдвигов по каждой из возможных комбинаций линейно независимых векторов $(\overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e}_\ell)$. Ячейку периодичности области Ω обозначим $\square$.

Пусть $X_i \in \Gamma$, $i = 1, \ldots, k$, — некоторые дискретные параметры, стремящиеся к бесконечности, $k \in N$. Будем считать, что любые два значения X_i можно перевести друг в друга с помощью конечного числа сдвигов по ячейки периодичности $\square$ в пределах области $\Omega \subseteq R^d$. Обозначим через $d(X) = \min\limits_{i \neq j} |X_i - X_j|$. Предполагается, что $d(X) \to \infty$.

Рассмотрим в пространстве $L_2(\Omega; C^n)$ некоторый абстрактный оператор $\mathcal{H}_0$. Областью определения $\mathfrak{D}(\mathcal{H}_0)$ данного оператора $\mathcal{H}_0$ является подпространством гильбертова пространства $W_2^m(\Omega; C^n)$, где $m \in N$. Будем предполагать, что данный оператор удовлетворяет следующим условиям.

A1. Для любой $u \in \mathfrak{D}(\mathcal{H}_0)$ выполнено неравенство

$$\|u\|_{W_2^m(\Omega;C^n)} \leqslant C_1\Big(\|\mathcal{H}_0 u\|_{L_2(\Omega;C^n)} + \|u\|_{L_2(\Omega;C^n)}\Big) \leqslant C_2\|u\|_{W_2^m(\Omega;C^n)},$$

где C_1, C_2 — некоторые константы, не зависящие от u.

A2. Справедливо равенство

$$\mathcal{S}(-X_i)\,\mathcal{H}_0\,\mathcal{S}(X_i) = \mathcal{H}_0, \quad i = 1, \ldots, k,$$

где $\mathcal{S}(X_i)$ — оператор сдвига, действующий по правилу $(\mathcal{S}(X_i)u)(\cdot) = u(\cdot - X_i)$.

Первое из данных условий следует понимать как обобщение в определенном смысле условия эллиптичности для дифференциальных операторов, а второе — как обобщение условия периодичности.

Введем в рассмотрение функции $\xi_i, \eta_i \in C^m(\overline{\Omega})$, удовлетворяющие следующим требованиям.

A3. Существует такая функция $\phi \in C^m(\overline{\Omega})$, что выполнены оценки:

$$|\xi_i(x)| \leqslant C\phi(x), \quad \partial^\alpha \phi(x) \leqslant C\phi(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \quad i = 1, \ldots, k, \quad |\alpha| \leqslant m,$$

где C — некоторая константа, не зависящая от x, α — мультииндекс.

A4. Функции ϕ, η_i и все их производные до порядка m стремятся к нулю на бесконечности.

Далее эти функции будем называть весовыми. Будем считать, что для оператора $\mathcal{H}_0$ верно еще одно предположение.

A5. Для любой $u \in \mathfrak{D}(\mathcal{H}_0)$ и достаточно малых ε имеет место оценка

$$\|(\phi^{-\varepsilon}\mathcal{H}_0\phi^{\varepsilon} - \mathcal{H}_0)u\|_{L_2(\Omega;C^n)} \leqslant \varsigma(\varepsilon)\|u\|_{W_2^m(\Omega;C^n)},$$

где функция $\varsigma(\varepsilon)$ не зависит от u и $\varsigma(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Пусть $\mathcal{L}_i^0$, $i = 1, \ldots, k$, — произвольные операторы, ограниченные как операторы из пространства $W_2^m(\Omega; C^n)$ в пространство $L_2(\Omega; C^n)$. Введем в рассмотрение операторы $\mathcal{L}_i = \xi_i \mathcal{L}_i^0 \eta_i$ в пространстве $L_2(\Omega; C^n)$ с областью определения $W_2^m(\Omega; C^n)$. Под разбегающимися возмущениями будем понимать операторы вида $\sum\limits_{i=1}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)$.

В пространстве $L_2(\Omega; C^n)$ определим возмущенный оператор

$$\mathcal{H}_X := \mathcal{H}_0 + \sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)$$

с областью определения $\mathfrak{D}(\mathcal{H}_0)$.

Введем в рассмотрение семейство вспомогательных операторов $\mathcal{H}_i := \mathcal{H}_0 + \mathcal{L}_i$ в пространстве $L_2(\Omega; C^n)$ с областью определения $\mathfrak{D}(\mathcal{H}_0)$. Будем предполагать, что выполнено следующее условие.

A6. Операторы $\mathcal{H}_i$ замкнуты.

В работе исследуется поведение спектра возмущенного оператора $\mathcal{H}_X$ в случае простого предельного собственного значения.

Целью данной работы является изучение поведения дискретного и существенного спектров оператора $\mathcal{H}_X$ при $\tau(X) \to \infty$.

Пусть λ_0 — простое и изолированное собственное значение одного из вспомогательных операторов $\mathcal{H}_i$, например, оператора $\mathcal{H}_1$, и не принадлежит спектрам операторов $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_i$, $i = 2, \ldots, k$, а ψ_0 — нормированная в пространстве $L_2(\Omega; C^n)$ собственная функция, соответствующая собственному значению λ_0. Через U будем обозначать малую фиксированную окрестность точки λ_0, которая не содержит никаких других точек спектра операторов $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_i$, кроме самой точки λ_0, через $\mathcal{R}_1(z)$ — редуцированную резольвенту оператора $\mathcal{H}_1$ в окрестности U и $\mathcal{R}_i(z) = (\mathcal{H}_i - z)^{-1}$, где $i \geqslant 2$, а $z \in U$. Положим

$$\varepsilon(X) = \max\Big\{\max_{z\in U}\max_{i,j}\Big\|\mathcal{L}_i^0\eta_i\mathcal{S}(X_i - X_j)\mathcal{R}_j(z)\varsigma_j\Big\|_{L_2(\Omega;C^n)\to L_2(\Omega;C^n)}, \\ \max_j\Big\|\mathcal{L}_j^0\eta_j\mathcal{S}(X_j - X_1)\psi_0\Big\|_{L_2(\Omega,C^n)}\Big\}. \quad (1)$$

Здесь и далее под символом $\|\cdot\|_{Y_1\to Y_2}$ будем обозначать норму линейного оператора, действующего из нормированного пространства Y_1 в нормированное пространство Y_2.

Теорема 1. Существует единственное собственное значение λ_X возмущенного оператора $\mathcal{H}_X$, которое сходится к λ_0 при $X \to \infty$. Данное собственное значение λ_X простое и изолированное. Собственная функция ψ_X, соответствующая λ_X, сходится к функции ψ_0 в пространстве $W_2^m(\Omega; C^n)$ при $X \to \infty$. Собственное значение λ_X и собственная функция ψ_X представляются в виде равномерно сходящихся для достаточно больших X рядов

$$\lambda_X = \lambda_0 + \sum_{i=2}^{\infty}\Lambda_i(X), \qquad \psi_X(x) = \psi_0(x - X_1) + \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_{i,j}(x - X_j, X), \quad (2)$$

где сходимость ряда для ψ_X понимается в смысле нормы $W_2^m(\Omega; C^n)$. Коэффициенты данных рядов определяются равенствами

$$\Lambda_p = \sum_{i=2}^{k}\Big(\mathcal{L}_1\mathcal{S}(X_1 - X_i)\varphi_{i,p-1}, \psi_0\Big)_{L_2(\Omega;C^n)}, \quad (3)$$

$$\varphi_{1,1} = 0, \quad \varphi_{j,1} = -(\mathcal{H}_j - \lambda_0)^{-1}\Big(\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j - X_1)\psi_0\Big), \quad (4)$$

$$\varphi_{1,p} = \mathcal{R}_1(\lambda_0)\Big(\sum_{t=1}^{p}\Lambda_t\varphi_{1,p-t} - \sum_{i=2}^{k}\mathcal{L}_1\mathcal{S}(X_1 - X_i)\varphi_{i,p-1}\Big), \quad (5)$$

$$\varphi_{j,p} = (\mathcal{H}_j - \lambda_0)^{-1}\Big(\sum_{t=1}^{p}\Lambda_t\varphi_{j,p-t} - \sum_{i=1,\ i\neq j}^{k}\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j - X_i)\varphi_{i,p-1}\Big), \quad (6)$$

где $j = 2, \ldots, k$, $p \geqslant 2$. Верны оценки

$$\Big|\Lambda_i(X)\Big| \leqslant C\varepsilon^i(X), \quad \|\varphi_{j,i}\|_{W_2^{2m}(\Omega;C^n)} \leqslant C\varepsilon^i(X), \quad (7)$$

где C — некоторые константы, не зависящие от i, j, X.

2. Доказательство вспомогательных утверждений

В настоящем разделе мы докажем несколько вспомогательных утверждений, необходимых нам для доказательства основного результата.

Лемма 1. Существенные спектры возмущенного оператора $\mathcal{H}_X$, вспомогательных операторов $\mathcal{H}_i$, $i = 1, \ldots, k$, совпадают с существенным спектром невозмущенного оператора $\mathcal{H}_0$.

Доказательство леммы 1 проводится аналогично доказательству теоремы 1 в [20].

Лемма 2. Существует единственное собственное значение λ_X возмущенного оператора $\mathcal{H}_X$, которое сходится к λ_0 при $X \to \infty$. Данное собственное значение λ_X простое и изолированное. Собственная функция ψ_X, соответствующая λ_X, сходится к функции ψ_0 в пространстве $W_2^{2m}(R^d; C^n)$ при $X \to \infty$.

Доказательство. В данной лемме операторную норму $\|\cdot\|_{L_2(R^d;C^n)\to W_2^{2m}(R^d;C^n)}$ будем обозначать символом $\|\cdot\|$, а скалярное произведение $(\cdot,\cdot)_{L_2(R^d;C^n)}$ — символом $(\cdot,\cdot)$.

Пусть K_r — окружность с центром в точке λ_0 и радиусом r, не содержащая точек спектра операторов $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_i$. Аналогично доказательству теоремы 1 из работы [26] доказывается равномерная по $z \in U$ сходимость резольвенты возмущенного оператора $\mathcal{H}_X$ к некоторому предельному оператору при $X \to \infty$:

$$\left\|(\mathcal{H}_X - z)^{-1} - \sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}(-X_i)(\mathcal{H}_i - z)^{-1}\mathcal{S}(X_i) - (k-1)(\mathcal{H}_0 - z)^{-1}\right\| \to 0.$$

Проинтегрировав теперь последнее соотношение по замкнутому контуру K_r, получим

$$\left\|\int\limits_{K_r}(\mathcal{H}_X - z)^{-1}dz - \int\limits_{K_r}\sum_{i=1}^{k}\mathcal{S}(-X_i)(\mathcal{H}_i - z)^{-1}\mathcal{S}(X_i)\,dz - (k-1)\int\limits_{K_r}(\mathcal{H}_0 - z)^{-1}dz\right\| \to 0. \quad (8)$$

В силу того, что операторы $\mathcal{H}_i, i = 0, \ldots, k$, самосопряженные, а окружность K_r не содержит точек их спектра, справедливы равенства

$$\int\limits_{K_r}\sum_{i=2}^{k}\mathcal{S}(-X_i)(\mathcal{H}_i - z)^{-1}\mathcal{S}(X_i)\,dz = 0, \qquad \int\limits_{K_r}(\mathcal{H}_0 - z)^{-1}dz = 0.$$

С учетом последних двух равенств соотношение (8) можно переписать в виде

$$\left\|\int\limits_{K_r}(\mathcal{H}_X - z)^{-1}\,dz - \mathcal{S}(-X_1)\Big(\int\limits_{K_r}(\mathcal{H}_1 - z)^{-1}dz\Big)\mathcal{S}(X_1)\right\| \to 0. \quad (9)$$

Так как λ_0 — простое изолированное собственное значение оператора $\mathcal{H}_1$, а ψ_0 — соответствующая ему собственная функция, то согласно формуле (3.21) из [29, Гл. V, §3, п. 5] справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int\limits_{K_r}(\mathcal{H}_1 - z)^{-1}dz = \psi_0(\cdot,\psi_0).$$

В силу последнего равенства, соотношение (9) примет вид

$$\left\|\int\limits_{K_r}(\mathcal{H}_X - z)^{-1}dz - \psi_0(\cdot + X_1)\big(\cdot,\psi_0(\cdot + X_1)\big)\right\| \to 0. \quad (10)$$

Второе слагаемое в последнем соотношении отлично от нуля. Следовательно, внутри любой окружности K_r при достаточно малых r существует по крайней мере одно собственное значение оператора $\mathcal{H}_X$ и соответствующая ему собственная функция.

Единственность собственного значения λ_X доказывается методом от противного аналогично доказательству единственного возмущенного собственного значения для дифференциального оператора с разбегающимися возмущениями, рассматриваемого в работе [20].

Лемма 3. Собственная функция ψ_0 оператора $\mathcal{H}_1$ представима в виде

$$\psi_0(x) = \exp\left(-\rho\int\limits_0^{|x|} a(t)\,dt\right)\widehat{\psi}_0(x), \tag{11}$$

где $\rho \in (0,\,1)$ — некоторое фиксированное достаточно малое число, $\widehat{\psi}_0 \in W_2^{2m}(R^d; C^n)$ — некоторая функция и

$$\|\mathcal{L}_j^0\eta_j\mathcal{S}(X_j - X_1)\psi_0\|_{L_2(R^d,C^n)} \to 0 \quad \text{при} \quad X \to \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим уравнение на собственное значение $(\mathcal{H}_1 - \lambda_0)\psi_0 = 0$. Представим его в виде

$$(\mathcal{H}_0 - \lambda_0)\psi_0 = -\varsigma_1 g_1,$$

где $g_1 = \mathcal{L}_1^0\eta_1\psi_0 \in L_2(R^d; C^n)$. В силу того, что λ_0 попадает в резольвентное множество оператора $\mathcal{H}_0$, справедливость леммы непосредственно следует из последнего представления и леммы 1 в статье [26].

Лемма 4. Для любой функции $h \in L_2(R^d; C^n)$ справедлива равномерная по $z \in U$ оценка

$$\left\|\mathcal{L}_i^0\eta_i\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{k}\mathcal{S}(X_i - X_j)\mathcal{R}_j(z)\varsigma_j h\right\|_{L_2(R^d;C^n)} \leqslant C(X)\|h\|_{L_2(R^d;C^n)},$$

где $C(X)$ — некоторая функция, не зависящая от h, причем $C(X) \to 0$ при $X \to \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $z \in U$ и $j = 2,\,\ldots,\,k$ положим $u_j = \mathcal{R}_j\varsigma_j h \in W_2^{2m}(R^d; C^n)$. Функции u_j удовлетворяют уравнениям

$$(\mathcal{H}_j - z)u_j = \varsigma_j h.$$

Данные уравнения можно переписать в следующем виде:

$$(\mathcal{H}_0 - z)u_j = \varsigma_j g_j,$$

где $g_j = h - \mathcal{L}_j^0\eta_j u_j \in L_2(R^d; C^n)$. Применяя лемму 1 из работы [26] к последнему уравнению, получаем

$$\left\|\mathcal{L}_i^0\eta_i\sum_{\substack{j=2\\ i\neq j}}^{k}\mathcal{S}(X_i - X_j)\mathcal{R}_j(z)\varsigma_j h\right\|_{L_2(R^d;C^n)} \leqslant C(X)\|h\|_{L_2(R^d;C^n)}, \tag{12}$$

где $C(X) \to 0$ при $X \to \infty$.

В случае $j = 1$ имеют место равенства

$$(\mathcal{H}_1 - z)u = \varsigma_1 h - (\varsigma_1 h, \psi_0)_{L_2(R^d;C^n)}\psi_0, \quad (\mathcal{H}_0 - z)u = \varsigma_1 f - (\varsigma_1 h_1, \psi_0)_{L_2(R^d;C^n)}\psi_0.$$

где $f = h - \mathcal{L}_1^0 \eta_1 u \in L_2(R^d; C^n)$. Повторяя теперь доказательство леммы 1 из работы [26] и учитывая равенство (11), приходим к неравенству

$$\left\| \mathcal{L}_i^0 \eta_i \mathcal{S}(X_i - X_1)\mathcal{R}_1(z)\varsigma_1 h \right\|_{L_2(R^d;C^n)} \leqslant C(X)\|h\|_{L_2(R^d;C^n)},$$

где $C(X) \to 0$ при $X \to \infty$. Из последнего неравенства и оценки (12) следует справедливость леммы.

3. Доказательство главного результата

Доказательство основного результата проводится в четыре этапа:

1) сведение уравнения на собственные значения возмущенного оператора $\mathcal{H}_X$ к некоторому регулярно возмущенному операторному уравнению в специально введенном гильбертовом пространстве;

2) приведение исходной задачи с помощью адаптированной версии метода Бирмана — Швингера (см. [26, 28]) к анализу операторного уравнения и нахождению нулей некоторой голоморфной функции;

3) доказательство разрешимости данных уравнений и представление их решений в виде равномерно сходящихся рядов;

4) вывод явных формул для коэффициентов полученных равномерно сходящихся рядов.

Опишем теперь подробнее каждый из этапов. Начнем с первого этапа. Для начала введем в рассмотрение гильбертово пространство

$$\mathfrak{L} := \left\{ h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \ldots \\ h_k \end{pmatrix} : h_i \in L_2(R^d; C^n),\ i = 1, \ldots, k \right\}$$

со скалярным произведением

$$(u, v)_{\mathfrak{L}} = \sum_{i=1}^{k} (u_i, v_i)_{L_2(R^d;C^n)}.$$

Теперь рассмотрим уравнение на собственные значения:

$$\mathcal{H}_X \psi_X = \lambda_X \psi_X. \tag{13}$$

Перепишем данное уравнение в следующем виде:

$$(\mathcal{H}_0 - \lambda_X)\psi_X = -\sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i \mathcal{S}(X_i)\psi_X.$$

Исходя из того, что правая часть последнего уравнения представляет собой сумму, решение данного уравнения — функцию $\psi_X(x)$ — будем искать в виде суммы:

$$\psi_X(x) = \sum_{j=1}^{k} \mathcal{S}(-X_j)\psi_j(x), \tag{14}$$

где функции ψ_j удовлетворяют уравнениям

$$(\mathcal{H}_0 - \lambda_X)\psi_j = -\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)\psi_i.$$

Подставляя теперь (14) в (13), получаем:

$$0 = \Big(\mathcal{H}_0 + \sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i) - \lambda_X\Big)\Big(\sum_{j=1}^{k} \mathcal{S}(-X_j)\psi_j(x)\Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \mathcal{S}(-X_j)\Big[(\mathcal{H}_j - \lambda_X)\psi_j + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} \mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j - X_i)\psi_i\Big].$$

Для того, чтобы последнее равенство было верным, достаточно выполнения k уравнений

$$(\mathcal{H}_j - \lambda)\psi_j + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} \mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j - X_i)\psi_i = 0. \tag{15}$$

Введем в рассмотрение два параметра: 1) малый параметр δ, $0 < \delta \ll 1$; 2) некоторую функцию $\varepsilon(X)$, зависящую от X, причем $\varepsilon(X) \to 0$ при $X \to \infty$. Эти параметры будут определены ниже.

Далее вместо уравнений (15) будем рассматривать уравнения более общего вида

$$(\mathcal{H}_j - \lambda_X)\psi_j + \delta\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} \frac{1}{\varepsilon(X)}\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j - X_i)\psi_i = 0. \tag{16}$$

Легко видеть, что уравнение (15) получается из (16) при $\varepsilon(X) = \delta$.

Из уравнения (16) выводим:

$$(\mathcal{H}_j - \lambda_X)\psi_j = \varsigma_j g_j, \tag{17}$$

где

$$g_j = -\delta\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} \frac{1}{\varepsilon(X)}\mathcal{L}_j^0\eta_j\mathcal{S}(X_j - X_i)\psi_i \in L_2(R^d; C^n).$$

В пространстве $\mathfrak{L}$ определим операторы

$$\mathcal{H} := \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{H}_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{H}_k \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{P} := \begin{pmatrix} \varsigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varsigma_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \varsigma_k \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{T}_X := \frac{1}{\varepsilon(X)}\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{L}_1^0\eta_1\mathcal{S}(X_1 - X_2) & \dots & \mathcal{L}_1^0\eta_1\mathcal{S}(X_1 - X_k) \\ \mathcal{L}_2^0\eta_2\mathcal{S}(X_2 - X_1) & 0 & \dots & \mathcal{L}_2^0\eta_2\mathcal{S}(X_2 - X_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{L}_k^0\eta_k\mathcal{S}(X_k - X_1) & \mathcal{L}_k^0\eta_k\mathcal{S}(X_k - X_2) & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

и введем следующие обозначения:

$$\Psi_X := \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_k \end{pmatrix} \in \mathfrak{L}, \quad g := \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_k \end{pmatrix} \in \mathfrak{L}.$$

С учетом введенных обозначений уравнения (16), (17) можно переписать как уравнения в пространстве $\mathfrak{L}$:

$$(\mathcal{H} - \lambda_X)\Psi_X + \delta \mathcal{P}\mathcal{T}_X \Psi_X = 0, \tag{18}$$

$$(\mathcal{H} - \lambda_X)\Psi_X = \mathcal{P}g, \quad \Psi_X = (\mathcal{H} - \lambda_X)^{-1}\mathcal{P}g. \tag{19}$$

В итоге мы пришли к некоторому регулярно возмущенному операторному уравнению.

Перейдем теперь ко второму этапу доказательства — исследованию данного уравнения. Так как λ_0 не принадлежит спектрам операторов $\mathcal{H}_i$ при $i \geqslant 2$, то операторы $(\mathcal{H}_i - z)^{-1}$, $i \geqslant 2$, ограничены как операторы из пространства $L_2(R^d; C^n)$ в пространство $W_2^{2m}(R^d; C^n)$ и голоморфны по $z \in U$. Напомним, что под U мы понимаем некоторую малую фиксированную окрестность точки λ_0, не содержащую никаких других точек спектра операторов $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_i$, $i = 2, \ldots, k$, кроме точки λ_0. В силу того, что λ_0 — простое собственное значение оператора $\mathcal{H}_1$, согласно формуле (3.21) из [29, Гл. V, § 3, п. 5] резольвента этого оператора представима в виде

$$(\mathcal{H}_1 - \lambda_X)^{-1} f = \frac{(f, \psi_0)_{L_2(R^d;C^n)}}{\lambda_0 - \lambda_X}\psi_0 + \mathcal{R}_1(\lambda_X) f, \tag{20}$$

где $f \in L_2(R^d; C^n)$; $\mathcal{R}_1(z)$ — редуцированная резольвента, голоморфная по z для всех z из U, действующая в ортогональном дополнении к функции ψ_0. С учетом формулы (20) действие оператора $(\mathcal{H} - \lambda_X)^{-1}$ выглядит следующим образом:

$$(\mathcal{H} - \lambda_X)^{-1} h = \begin{pmatrix} (\mathcal{H}_1 - \lambda_X)^{-1} h_1 \\ \vdots \\ (\mathcal{H}_k - \lambda_X)^{-1} h_k \end{pmatrix} = \frac{(h_1, \psi_0)_{L_2(R^d;C^n)}}{\lambda_0 - \lambda_X} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1(\lambda_X) h_1 \\ \vdots \\ \mathcal{R}_k(\lambda_X) h_k \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_0 - \lambda_X}(h, \Psi_0)_{\mathfrak{L}}\Psi_0 + \mathcal{R}(\lambda_X) h, \tag{21}$$

где

$$\mathcal{R}(z) := \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1(z) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2(z) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathcal{R}_k(z) \end{pmatrix}, \qquad \Psi_0 := \begin{pmatrix} \psi_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

и $h \in \mathfrak{L}$. Подставляя теперь равенства (19) в уравнение (18), получаем

$$\mathcal{P}\Big(g + \delta\mathcal{T}_X(\mathcal{H} - \lambda_X)^{-1}\mathcal{P}g\Big) = 0,$$

Для справедливости последнего равенства достаточно выполнения уравнения

$$g + \delta\mathcal{T}_X(\mathcal{H} - \lambda_X)^{-1}\mathcal{P}g = 0.$$

Перенося второе слагаемое из левой части последнего равенства в правую часть и учитывая равенство (21), получаем

$$g = \frac{\delta}{\lambda_0 - \lambda_X}(\mathcal{P}g, \Psi_0)_{\mathfrak{L}}\mathcal{T}_X\Psi_0 + \delta\mathcal{T}_X\mathcal{R}(\lambda_X)\mathcal{P}g,$$

откуда

$$\Big(\mathrm{I} - \delta\mathcal{T}_X\mathcal{R}(\lambda_X)\mathcal{P}\Big)g = \frac{\delta}{\lambda_0 - \lambda_X}(\mathcal{P}g, \Psi_0)_{\mathfrak{L}}\mathcal{T}_X\Psi_0. \tag{23}$$

Определим $\varepsilon(X)$ формулой (1). Из лемм 3, 4 следует сходимость к нулю функции $\varepsilon(X)$ при $X \to \infty$.

Компоненты оператора $\mathcal{T}_X\mathcal{R}(\lambda_X)\mathcal{P}$ имеют вид

$$\varepsilon^{-1}(X)\mathcal{L}_i^0\eta_i\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{k}\mathcal{S}(X_i - X_j)\mathcal{R}_j(z)\varsigma_j.$$

Согласно лемме 3 и выбору функции $\varepsilon(X)$ заключаем, что каждая компонента оператора $\mathcal{T}_X\mathcal{R}(\lambda_X)\mathcal{P}$ является равномерно ограниченным по X оператором, действующим в пространстве $L_2(R^d; C^n)$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 5. Оператор $\mathcal{T}_X\mathcal{R}(z)\mathcal{P}$ равномерно ограничен по всем $z \in U$ и достаточно большим X.

Из леммы 5 следует, что оператор $\delta\mathcal{T}_X\mathcal{R}(\lambda_X)\mathcal{P}$ при достаточно малых δ является сжимающим. А это означает, что существует оператор $(\mathrm{I} - \delta\mathcal{T}_X\mathcal{R}(\lambda_X)\mathcal{P})^{-1}$.

Подействовав теперь оператором $(\mathrm{I} - \delta\mathcal{T}_X\mathcal{R}(\lambda_X)\mathcal{P})^{-1}$ на обе части уравнения (23), получим

$$g = \frac{\delta}{\lambda_0 - \lambda_X}\Big(\mathcal{P}g, \Psi_0\Big)_{\mathfrak{L}}(\mathrm{I} - \delta\mathcal{T}_X\mathcal{R}(\lambda_X)\mathcal{P})^{-1}\mathcal{T}_X\Psi_0.$$

На обе части последнего равенства действуем оператором $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P}g = \frac{\delta}{\lambda_0 - \lambda_X}\Big(\mathcal{P}g, \Psi_0\Big)_{\mathfrak{L}}\mathcal{P}(\mathrm{I} - \delta\mathcal{T}_X\mathcal{R}(\lambda_X)\mathcal{P})^{-1}\mathcal{T}_X\Psi_0,$$

Вычисляем скалярные произведения левой и правой части последнего равенства на функцию Ψ_0:

$$(\mathcal{P}g, \Psi_0)_{\mathfrak{L}} = \frac{\delta}{\lambda_0 - \lambda_X}(\mathcal{P}g, \Psi_0)_{\mathfrak{L}}\Big(\mathcal{P}(\mathrm{I} - \delta\mathcal{T}_X\mathcal{R}(\lambda_X)\mathcal{P})^{-1}\mathcal{T}_X\Psi_0, \Psi_0\Big)_{\mathfrak{L}}.$$

Скалярное произведение $(\mathcal{P}g, \Psi_0)_{\mathfrak{L}}$ отлично от нуля, так как в противном случае $g \equiv 0$, $\Psi_i \equiv 0$, а следовательно, и собственная функция Ψ возмущенного оператора $\mathcal{H}_X$ тождественно равна нулю. Сократив последнее равенство на $(\mathcal{P}g, \Psi_0)_{\mathfrak{L}}$, получим

$$\lambda_X = \lambda_0 - \delta\Big(\mathcal{P}(\mathrm{I} - \delta\mathcal{T}_X\mathcal{R}(\lambda_X)\mathcal{P})^{-1}\mathcal{T}_X\Psi_0, \Psi_0\Big)_{\mathfrak{L}}. \tag{24}$$

Последнее равенство является уравнением на собственное значение возмущенного оператора $\mathcal{H}_X$. Выведем теперь уравнение на собственную функцию Ψ_X возмущенного оператора $\mathcal{H}_X$. Так как собственная функция ψ_0 определяется с точностью до константы, то функция g представима в виде

$$g = C(\mathrm{I} - \delta\mathcal{T}_X\mathcal{R}(\lambda_X)\mathcal{P})^{-1}\mathcal{T}_X\Psi_0,$$

где C — произвольная константа. С учетом последнего равенства уравнение (24) примет вид

$$\lambda_X = \lambda_0 - \delta C^{-1}(\mathcal{P}g, \Psi_0)_{\mathfrak{L}}.$$

Из двух предыдущих равенств, (18), (21) и уравнения

$$\Psi_X = (\mathcal{H} - \lambda_X)^{-1}\mathcal{P}g = \frac{\Psi_0}{\lambda_0 - \lambda_X}(\mathcal{P}g, \Psi_0)_{\mathfrak{L}} + \mathcal{R}(\lambda_X)\mathcal{P}g$$

выводим

$$\Psi_X = \delta^{-1}C\Psi_0 + \mathcal{R}(\lambda_X)\mathcal{P}g.$$

Выбрав $C = \delta$, получим

$$\Psi_X = \Psi_0 - \delta\mathcal{R}(\lambda_X)\mathcal{P}(\mathrm{I} - \delta\mathcal{T}_X\mathcal{R}(\lambda_X)\mathcal{P})^{-1}\mathcal{T}_X\Psi_0. \tag{25}$$

На этом заканчивается второй этап доказательства основного результата, в ходе которого с помощью метода Бирмана — Швингера были получены уравнения на собственное значение (24) и собственную функцию возмущенного оператора (25). Остается только решить данные уравнения и доказать голоморфность данных решений. Этим мы и займемся на третьем этапе. Выясним также зависимость решения уравнения (24) от параметров X и δ.

В уравнении (24) сделаем замену $z = \lambda - \lambda_0$:

$$F(\delta, z, X) := z - \delta G(\delta, z, X) = 0,$$

где

$$G(\delta, z, X) := \Big(\mathcal{P}(\mathrm{I} - \delta\mathcal{T}_X\mathcal{R}(z)\mathcal{P})^{-1}\mathcal{T}_X\Psi_0, \Psi_0\Big)_{\mathfrak{L}}.$$

Функция $G(\delta, z, X)$ аналитичная в области $|\delta| < \delta_0$, $|z| < z_0$, где δ_0, z_0 — некоторые достаточно малые положительные числа.

Функция $z \mapsto z$ имеет единственный простой нуль в точке $z = 0$. Легко видеть, что для функции $G(\delta, z, X)$ справедлива оценка

$$|G(\delta, z, X)| \leqslant C \quad \text{для всех} \quad |z| \leqslant z_0,$$

где C — некоторая константа, не зависящая от δ, z, X. Тогда для функции $F(\delta, z, X)$ имеет место неравенство

$$\delta |G(\delta, z, X)| \leqslant \delta C < z_0 \quad \text{при} \quad |z| = z_0 \quad \text{и достаточно малых} \quad \delta.$$

Из последней оценки следует, что к функции $F(\delta, z, X)$ можно применить теорему Руше [30, Гл. IV, §3], согласно которой она имеет только один простой корень в области $|z| \leqslant z_0$. Обозначим данный корень через $z_1(\delta, X)$. Применяя теорему Коши [30, Гл. III, §2] о вычетах, нетрудно проверить справедливость следующего представления для корня $z_1(\delta, X)$:

$$z_1(\delta, X) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{|z| = z_0'} z \frac{\dfrac{\partial F}{\partial z}(\delta, z, X)}{F(\delta, z, X)}\, dz = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{|z| = z_0'} z \frac{1 - \delta \dfrac{\partial G}{\partial z}(\delta, z, X)}{z - \delta G(\delta, z, X)}\, dz, \tag{26}$$

где $z_0' < z_0$ — некоторое достаточно малое положительное число.

Из аналитичности функции $G(\delta, z, X)$ в области $|\delta| < \delta_0$, $|z| < z_0$ и неравенства нулю функции $F(\delta, z, X)$ при $|\delta| \leqslant \delta_0'$, $|z| = z_0$ следует, что функция

$$\Phi(\delta, z, X) := z \frac{1 - \delta \dfrac{\partial G}{\partial z}(\delta, z, X)}{z - \delta G(\delta, z, X)}$$

также является аналитической по δ в круге $|\delta| \leqslant \delta_0'$. Так как $\Phi(\delta, z, X)$ — аналитическая по δ функция, то ее можно представить в виде равномерно сходящегося ряда

$$\Phi(\delta, z, X) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i K_i(z, X). \tag{27}$$

где $K_i(z, X)$ — некоторые функции, зависящие от z и X.

Лемма 6. Для коэффициентов $K_i(z, X)$ ряда (27) справедлива оценка

$$|K_i(z, X)| \leqslant k_i,$$

где k_i — некоторые константы, и ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \delta^i k_i$ равномерно сходится по $|\delta| \leqslant \delta_0/2$.

Доказательство. Из определения функций $G(\delta, z, X)$ и $\Phi(\delta, z, X)$ следует справедливость оценки

$$|\Phi(\delta, z, X)| \leqslant C, \tag{28}$$

для всех $|\delta| \leqslant \delta_0$ и $|z| = z_0'$ при достаточно малых δ_0 и достаточно больших X. Здесь C — некоторая константа, не зависящая от i, δ, z и X. Коэффициенты $K_i(z, X)$ определяются по формуле

$$K_i(z, X) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{|\delta| = \delta_0} \frac{\Phi(\delta, z, X)}{\delta^{i+1}}\, d\delta.$$

Поэтому
$$\Big|K_i(z,X)\Big| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\delta|=\delta_0} \frac{|\Phi(\delta,z,X)|}{|\delta|^{i+1}}\,d\delta \leqslant \frac{C}{2\pi}\int\limits_{|\delta|=\delta_0}\frac{d\delta}{|\delta|^{i+1}} = C\delta_0^{-i} := k_i.$$
Из последнего неравенства и оценки (28) следует справедливость леммы.

Вернемся теперь к уравнению (26). Покажем, что корень $z_1(\delta,X)$ можно представить в виде равномерно сходящегося ряда. Справедливость данного утверждения непосредственно следует из равенства
$$z_1(\delta,X) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{|z|=z_0'} \Phi(\delta,z,X)\,dz = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{|z|=z_0'}\sum_{i=0}^{\infty}\delta^i K_i(z,X)\,dz =$$
$$= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{i=0}^{\infty}\delta^i\int\limits_{|z|=z_0'} K_i(z,X)\,dz = \sum_{i=0}^{\infty}\delta^i\lambda_i(X),$$
где
$$\lambda_i(X) := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{|z|=z_0'} K_i(z,X)\,dz$$
и справедлива оценка
$$|\lambda_i(X)| \leqslant z_0' k_i.$$
Из последнего неравенства получаем
$$\sum_{i=0}^{\infty}|\delta^i\lambda_i(X)| \leqslant z_0'\sum_{i=0}^{\infty}\delta^i k_i,$$
где ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\delta^i k_i$, согласно лемме 6, является равномерно сходящимся по $|\delta| \leqslant \delta_0/2$ рядом. Следовательно, ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\delta^i\lambda_i(X)$ равномерно сходится по X и $|\delta| \leqslant \delta_0/2$.

Таким образом, существует единственное решение уравнения (24), которое представимо в виде равномерно сходящегося по δ ряда
$$\lambda_X(\delta) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{\infty}\delta^i\lambda_i(X).$$
Из леммы 2, равенств (14)–(16) теперь следует, что существует единственное собственное значение λ_X возмущенного оператора $\mathcal{H}_X$, сходящееся к собственному значению λ_0. Выбрав в последнем равенстве $\delta = \varepsilon(X)$, приходим к выводу, что данное собственное значение λ_X возмущенного оператора $\mathcal{H}_X$ представимо в виде равномерно сходящегося по X ряда
$$\lambda_X(\varepsilon(X)) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i(X)\,\lambda_i(X). \tag{29}$$

Рассмотрим теперь равенство (25). Так как $\mathcal{R}(z)$ — голоморфная по z, а λ_X — аналитическая по δ, то оператор $\mathcal{R}(\lambda_X(\delta))$ является голоморфным по δ. Следовательно, имеет место равенство
$$\Psi_X(\delta) = \Psi_0 + \sum_{i=1}^{\infty}\delta^i\Psi_i(X), \tag{30}$$

где коэффициенты $\Psi_i(X)$ определяются по формуле

$$\Psi_i(X) = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{|\delta|=\delta_0} \delta^{-i} \mathcal{R}\Big(\lambda_X(\delta)\Big)\mathcal{P}\Big(\mathrm{I} - \delta \mathcal{T}_X \mathcal{R}(\lambda_X(\delta))\mathcal{P}\Big)^{-1} \mathcal{T}_X \Psi_0 \, d\delta.$$

Из последней формулы аналогично доказательству леммы 6 выводим оценки

$$\|\Psi_i(X)\|_{\mathfrak{L}} \leqslant C\delta_0^{-i},$$

где C — некоторая константа, не зависящая от i, δ, z и X. Следовательно, собственная функция возмущенного оператора Ψ_X представима в виде ряда (30) равномерно сходящегося по X для достаточно больших X и по δ для $|\delta| \leqslant \delta_0/2$. Выбрав теперь $\delta = \varepsilon(X)$, получим

$$\Psi_X(\varepsilon(X)) = \Psi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i(X)\, \Psi_i(X). \tag{31}$$

Из последнего равенства и (14) получим выражения для собственной функции ψ_X, соответствующей собственному значению λ_X, в виде равномерно сходящегося по X ряда. На этом заканчивается наш третий этап доказательства. Остается только определить коэффициенты λ_i и Ψ_i разложений (29) и (31) соответственно. Для этого распишем равенство (30) покомпонентно:

$$\psi_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i \widetilde{\varphi}_{1,i}, \;\; j=1, \qquad \psi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i \widetilde{\varphi}_{j,i}, \;\; j=2,\,\ldots,\,k,$$

где $\widetilde{\varphi}_{j,i}(x,X) = \varepsilon^{-i}(X)\,\varphi_{j,i}(x,X)$ — некоторые функции из пространства $W_2^{2m}(R^d;C^n)$. Верны соотношения

$$\varphi_{1,0} = \psi_0, \quad \varphi_{j,0} = 0$$

и справдливы оценки

$$\|\varphi_{j,i}\|_{W_2^{2m}(R^d;C^n)} \leqslant C\varepsilon^i(X),$$

где C — некоторые константы, не зависящие от X. Коэффициенты λ_i будем искать в виде

$$\lambda_i(X) = \Lambda_i(X)\,\varepsilon^i(X),$$

где Λ_i — некоторые функции, для которых справедливы оценки

$$|\Lambda_i(X)| \leqslant C\varepsilon^i(X),$$

а C — некоторая константа, не зависящая от X. Теперь подставим ряды

$$\lambda_X(\delta) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \delta^i \varepsilon^{-i}(X)\,\Lambda_i(X),$$

$$\psi_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i \varepsilon^{-i}(X)\,\varphi_{1,i}, \;\; j=1, \quad \psi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i \varepsilon^{-i}(X)\,\varphi_{j,i}, \;\; j=2,\,\ldots,\,k,$$

в уравнение (16):

$$\Big(\mathcal{H}_1 - \lambda_0 - \sum_{s=1}^{\infty}\delta^s\varepsilon^{-s}(X)\,\Lambda_s(X)\Big)\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t\varepsilon^{-t}(X)\,\varphi_{1,t} + \\ + \delta\varepsilon^{-1}(X)\sum_{i=2}^{k}\mathcal{L}_1\mathcal{S}(X_1 - X_i)\sum_{p=1}^{\infty}\delta^p\varepsilon^{-p}(X)\,\varphi_{i,p} = 0,$$

$$\Big(\mathcal{H}_j - \lambda_0 - \sum_{s=1}^{\infty}\delta^s\varepsilon^{-s}(X)\,\Lambda_t(X)\Big)\sum_{t=1}^{\infty}\delta^t\varepsilon^{-t}(X)\,\varphi_{j,s} + \\ + \delta\varepsilon^{-1}(X)\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k}\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j - X_i)\sum_{p=0}^{\infty}\delta^p\varepsilon^{-p}(X)\,\varphi_{i,p} = 0, \quad j = 2,\,\ldots,\,k.$$

Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях δ, получаем

$$\begin{cases} (\mathcal{H}_1 - \lambda_0)\varphi_{1,1} = \psi_0\Lambda_1, \\ (\mathcal{H}_1 - \lambda_0)\varphi_{1,p} = \sum\limits_{t=1}^{p}\Lambda_t\varphi_{1,p-t} - \sum\limits_{i=2}^{k}\mathcal{L}_1\mathcal{S}(X_1 - X_i)\,\varphi_{i,p-1}, \\ (\mathcal{H}_j - \lambda_0)\varphi_{j,1} = -\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j - X_1)\,\psi_0, \\ (\mathcal{H}_j - \lambda_0)\varphi_{j,p} = \sum\limits_{s=t}^{p}\Lambda_t\varphi_{j,p-t} - \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k}\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j - X_i)\,\varphi_{i,p-1}. \end{cases} \tag{32}$$

где $j = 2,\,\ldots,\,k$, $p \geqslant 2$.

Лемма 7. Верны соотношения

$$(\varphi_{1,j},\psi_0)_{L_2(R^d);C^n} = 0, \quad j \geqslant 1.$$

Доказательство. Вычислим скалярное произведение:

$$(\Psi_X,\Psi_0)_{\mathfrak{L}} = (\psi_1,\psi_0)_{L_2(R^d,C^n)} = \sum_{p=0}^{\infty}\delta^p\varepsilon^{-p}(X)(\varphi_{1,p},\psi_0)_{L_2(R^d,C^n)}. \tag{33}$$

С другой стороны, согласно формулам (22), (25) и нормировке функции ψ_0, скалярное произведение $(\Psi_X,\Psi_0)_{\mathfrak{L}}$ имеет вид

$$(\Psi_X,\Psi_0)_{\mathfrak{L}} = (\Psi_0,\Psi_0)_{\mathfrak{L}} - \delta\Big(\mathcal{R}(\lambda_X)\mathcal{P}(\mathrm{I} - \delta\mathcal{T}_X\mathcal{R}(\lambda_X)\mathcal{P})^{-1}\mathcal{T}_X\Psi_0,\Psi_0\Big)_{\mathfrak{L}} = \\ = 1 - \delta\Big(\mathcal{R}_1(\lambda_X)h,\Psi_0\Big)_{L_2(R^d;C^n)},$$

где $h \in L_2(R^d;C^n)$ — первая компонента вектора $\mathcal{P}(\mathrm{I} - \delta\mathcal{T}_X\mathcal{R}(\lambda_X)\mathcal{P})^{-1}\mathcal{T}_X\Psi_0$. Оператор $\mathcal{R}_1(\lambda_0)$ действует в ортогональном дополнении к функции ψ_0, а потому

$$\Big(\mathcal{R}_1(\lambda_X)h,\Psi_0\Big)_{L_2(R^d;C^n)} = 0.$$

Следовательно,

$$(\Psi_X,\Psi_0)_{\mathfrak{L}} = 1.$$

Из последнего равенства и равенства (33) вытекает утверждение леммы.

Так как оператор $\mathcal{H}_1$ самосопряжен, то условием разрешимости первых двух уравнений в (32) является ортогональность правых частей уравнений функции ψ_0 в пространстве $L_2(R^d; C^n)$. Применяя это условие разрешимости и учитывая лемму 7, приходим к равенствам (3)–(6). Вновь учитывая лемму 7 и определение оператора $\mathcal{R}_1$, получаем равенства (7). Теорема 1 полностью доказана.

Заключение

Главным результатом настоящей работы являются разложения (2), формулы (3)–(6) и оценки (7). Оценки (7) показывают, что ряды (2) являются асимптотическими для возмущенного собственного значения λ_X и соответствующей ему собственной функции ψ_X возмущенного оператора. Вместе с тем эти ряды сходятся равномерно для достаточно больших X к λ_X и ψ_X, а суммы построенных рядов совпадают с λ_X и ψ_X соответственно. Доказано, что ряды (2) являются способом точного вычисления собственного значения λ_X и соответствующей ему собственной функции ψ_X. Коэффициенты указанных рядов определяются формулами (3)–(6). Заметим, что аналогичные формулы были получены автором в работе [20] для невозмущенного дифференциального оператора высокого порядка с разбегающимися возмущениями в многомерном пространстве.

Примеры невозмущенных и возмущающих операторов, а также весовых функций, для которых справедливы результаты теоремы, приведены в третьем параграфе работы [26]. Необходимо лишь от невозмущенных операторов потребовать условие самосопряженности, а от возмущающих операторов — условие симметричности.

Автор выражает благодарности Борисову Д. И. за постановку задачи и консультирование в процессе написания работы.

Список литературы

1. Borisov D. Asymtotic behaviour of the spectrum of a waveguide with distant perturbation // Mathematical Physics, Analysis and Geometry. 2007. Vol. 10, no. 2. P. 155–196. DOI: 10.1007/s11040-007-9028-1

2. Borisov D., Exner P. Exponential splitting of bound states in a waveguide with a pair of distant windows // J. of Physics A: Mathematical and General. 2004. Vol. 37, no. 10. P. 3411–3428. DOI: 10.1088/0305-4470/37/10/007

3. Borisov D. Distant perturbation of the Laplacian in a multi-dimensional space // Annales Henri Poincaré. 2007. Vol. 8, no. 7. P. 1371–1399. DOI: 10.1007/s00023-007-0338-4

4. Davies E.B. The twisting trick for double well Hamiltonians // Communications in Mathematical Physics. 1982. Vol. 85, no. 3. P. 471–479. DOI: 10.1007/BF01208725

5. Harrell E.M. Double wells // Communications in Mathematical Physics. 1980. Vol. 75, no. 3. P. 239–261. DOI: 10.1007/BF01212711

6. Hoegh-Krohn R., Mebknout M. The multiple well problem: asymptotic behavior of the eigenvalues and resonances // Trends and developments in the Eighties. Singapore: World Scientific, 1985. P. 244–272.

7. Tamura H. Existence of bound states for double well potentials and the Efimov effect // Functional-analytic methods for partial differential equations. B.; N.Y.: Springer, 1990. P. 173–186. DOI: 10.1007/BFb0084905

8. Aktosun T., Klaus M., Van der Mee C. On the number of bound states for the one-dimensional Srödinger equation // J. of Mathematical Physics. 1998. Vol. 39, no. 9. P. 4249–4256. DOI: 10.1063/1.532510

9. Morgan J.D. III, Simon B. Behavior of molecular potential energy curves for large nuclear separations // Intern. J. of Quantum Chemistry. 1980. Vol. 17, no. 6. P. 1143–1166. DOI: 10.1002/qua.560170609

10. Graffi S., Harrell E.M. II, Grecchi V., Silverstone H.J. The $1/R$ expansion for H_2^+: analyticity, summability and asymptotics // Annals of Physics. 1985. Vol. 165, no. 2. P. 441–483. DOI: 10.1016/0003-4916(85)90305-7

11. Ahlrichs R. Convergence properties of the intermolecular Force series ($1/R$ expansion) // Theoretica Chimica Acta. 1976. Vol. 41, no. 1. P. 17–15. DOI: 10.1007/BF00558020

12. Klaus M. Some remarks on double-wells in one and three dimensions // Annales de l'Institut Henri Poincaré. Sect. A: Physique Theorique 1981. Vol. 34, no. 4. P. 405–417.

13. Klaus M., Simon B. Binding of Schrödinger particles through conspiracy of potential wells // Annales de l'Institut Henri Poincaré. Sect. A: Physique Theorique. 1979. Vol. 30, no. 2. P. 83–87.

14. Pinchover Y. On the localization of binding for Srödinger operators and its extension to elliptic operators // J. d'Analyse Mathematique. 1995. Vol. 66, no. 1. P. 57–83. DOI: 10.1007/BF02788818

15. Harrell E.M., Klaus M. On the double-well problem for Dirac operators // Annales de l'Institut Henri Poincare. Sect. A: Physique Theorique. 1983. Vol. 38, no. 2. P. 153–166.

16. Reity O.K. Asymptotic expansions of the potential curves of the relativistic quantum-mechanical two-Coulomb-center problem // Symmetry in nonlinear mathematical physics: 4th Intern. Conf. (Kyiv, Ukraine, July 9-15): Proc. Pt. 2. Kyiv, 2002. P. 672–675.

17. Kondej S., Veselić I. Lower bounds on the lowest spectral gap of singular potential Hamiltonians // Annales Henri Poincaré. 2007. Vol. 8, no. 1. P. 109–134. DOI: 10.1007/s00023-006-0302-8

18. Головина А.М. Исследование спектральных свойств операторов с разбегающимися возмущениями (обзор) // Математика и математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. Т. 2. С. 1–22. DOI: 10.7463/mathm.0215.0776859

19. Golovina A.M. Discrete eigenvalues of periodic operators with distant perturbations // J. of Mathematical Sciences. 2013. Vol. 189, no. 3. P. 342–364. DOI: 10.1007/s10958-013-1192-1
20. Головина А.М. О спектре периодических эллиптичеких операторов с разбегающимися возмущениями в пространстве // Алгебра и анализ. 2013. Т. 25, № 5. С. 32–60.
21. Головина А.М. О дискретном спектре возмущенного периодических дифференциального операторов // Доклады Академии наук. 2013. Т. 448, № 3. С. 258–260. DOI: 10.7868/S0869565213030043
22. Golovina A.M. On the resolvent of elliptic operators with distant perturbations in the space // Russian Journal of Mathematical Physics. 2012. Vol. 19, no. 2. С. 182–192. DOI: 10.1134/S1061920812020045
23. Головина А.М. Резольвенты операторов с разбегающимися возмущениями // Математические заметки. 2012. Т. 91, вып. 3. С. 464–466. DOI: 10.4213/mzm9318
24. Головина А.М. Резольвенты и спектры периодических операторов с разбегающимися возмущениями: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Уфа, 2013. 116 с.
25. Головина А.М. Резольвенты и спектры периодических операторов с разбегающимися возмущениями: автореф. дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Уфа, 2013. 18 с.
26. Борисов Д.И., Головина А.М. О резольвентах периодических операторов с разбегающимися возмущениями // Уфимский математический журнал. 2012. Т. 4, № 2. С. 65–73.
27. Борисов Д.И. Дискретный спектр пары несимметричных волноводов, соединенных окном // Математический сборник. 2006. Т. 197, № 4. С. 3–32. DOI: 10.4213/sm1545
28. Гадыльшин Р.Р. О локальных возмущениях оператора Шредингера на оси // Теоретическая и математическая физика. 2002. Т. 132, № 1. С. 97–104. DOI: 10.4213/tmf349
29. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с. [Kato T. Perturbation theory for linear operators. B.; N.Y.: Springer, 1966. 592 p.].
30. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 1-2. 2-е изд. М.: Наука, 1967-1968.

Mathematics & Mathematical Modelling
Electronic journal of the Bauman MSTU
http://mathm.elpub.ru

Mathematics and Mathematical Modelling of the Bauman MSTU, 2017, no. 2, pp. 1–24.
DOI: **10.24108/mathm.0217.0000063**
Received: 16.05.2017

On the spectrum of periodic operators with distant perturbations

Golovina A. M.[1,*]

[*]nastya_gm@mail.ru

[1]Bauman Moscow State Technical University, Russia

Keywords: periodic operator, distant perturbations, spectrum, eigenvalues, eigenfunctions

We consider an arbitrary periodic operator with a finite number of distant perturbations in an arbitrary domain of a multidimensional space. The perturbations are arbitrary localized operators. We introduce distant perturbations through shift operators, perturbing operators, and certain weight functions that satisfy a set of the certain conditions.

The main aim of the paper is to study the spectrum of a perturbed operator when the distances between domains in which perturbations are located tend to infinity. The formulation of theses problem is quite general and has not been investigated before. Inprevious papers only the spectral properties of differential operators with distant perturbations were considered.

The main results are as follows:

• invariance of the essential spectrum of the perturbed operator with regard to distant perturbations;

• the existence of a simple and isolated eigenvalue of a perturbed operator that converges to a simple and isolated eigenvalue of the limit operator;

• complete asymptotic series for the perturbed eigenvalue and the perturbed eigenfunction;

• proof of uniform convergence of these series and derivation of explicit formulas for their coefficients.

The technique used to obtain the results is to reduce the eigenvalue equation to a regularly perturbed operator equation in a special Hilbert space. The perturbation smallness was described by two small characteristic parameters. The adapted version of the Birman–Schwinger method then applied allows us to reduce the problem to the analysis of an operator equation and to search of some holomorphic function zeros.

References

1. Borisov D. Asymtotic behaviour of the spectrum of a waveguide with distant perturbations. *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, 2007, vol. 10, no. 2, pp. 155–196. DOI: 10.1007/s11040-007-9028-1

2. Borisov D., Exner P. Exponential splitting of bound states in a waveguide with a pair of distant windows. *J. of Physics A: Mathematical and General*, 2004, vol. 37, no. 10, pp. 3411–3428. DOI: 10.1088/0305-4470/37/10/007

3. Borisov D. Distant perturbations of the Laplacian in a multi-dimensional space. *Annales Henri Poincaré*, 2007, vol. 8, no. 7, pp. 1371–1399. DOI: 10.1007/s00023-007-0338-4

4. Davies E.B. The twisting trick for double well Hamiltonians. *Communications in Mathematical Physics*, 1982, vol. 85, no. 3, pp. 471–479. DOI: 10.1007/BF01208725

5. Harrell E.M. Double wells. *Communications in Mathematical Physics*, 1980, vol. 75, no. 3, pp. 239–261. DOI: 10.1007/BF01212711

6. Hoegh-Krohn R., Mebknout M. The multiple well problem asymptotic behavior of the eigenvalues and resonances. *Trends and developments in the Eighties*. Singapore: World Scientific, 1985. Pp. 244–272.

7. Tamura H. Existence of bound states for double well potentials and the Efimov effect. *Functional-analytic methods for partial differential equations*. B.; N.Y.: Springer, 1990. Pp. 173–186. DOI: 10.1007/BFb0084905

8. Aktosun T., Klaus M., Van der Mee C. On the number of bound states for the one-dimensional Schrödinger equation. *J. of Mathematical Physics*, 1998, vol. 39, no. 9, pp. 4249–4256. DOI: 10.1063/1.532510

9. Morgan J.D. III, Simon B. Behavior of molecular potential energy curves for large nuclear separations. *Intern. J. of Quantum Chemistry*, 1980, vol. 17, no. 6, pp. 1143–1166. DOI: 10.1002/qua.560170609

10. Graffi S., Harrell E.M. II, Grecchi V., Silverstone H.J. The $1/R$ expansion for H_2^+: analyticity, summability and asymptotics. *Annals of Physics*, 1985, vol. 165, no. 2, pp. 441–483. DOI: 10.1016/0003-4916(85)90305-7

11. Ahlrichs R. Convergence properties of the intermolecular Force series ($1/R$ expansion). *Theoretica Chimica Acta*, 1976, vol. 41, no. 1, pp. 7–15. DOI: 10.1007/BF00558020

12. Klaus M. Some remarks on double-wells in one and three dimensions. *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Sect. A: Physique Theorique*, 1981, vol. 34, no. 4, pp. 405–417.

13. Klaus M., Simon B. Binding of Schrödinger particles through conspiracy of potential wells. *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Sect. A: Physique Theorique*, 1979, vol. 30, no. 2, pp. 83–87.

14. Pinchover Y. On the localization of binding for Schrödinger operators and its extension to elliptic operators. *J. d'Analyse Mathematique*, 1995, vol. 66, no. 1, pp. 57–83. DOI: 10.1007/BF02788818

15. Harrell E.M., Klaus M. On the double-well problem for Dirac operators. *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Sect. A: Physique Theorique*, 1983, vol. 38, no. 2, pp. 153–166.

16. Reity O.K. Asymptotic expansions of the potential curves of the relativistic quantum-mechanical two-Coulomb-center problem. *Symmetry in nonlinear mathematical physics: 4th Intern. Conf.* (Kyiv, Ukraine, July 9-15): Proc. Pt. 2. Kyiv, 2002. Pp. 672–675.

17. Kondej S., Veselić I. Lower bounds on the lowest spectral gap of singular potential Hamiltonians. *Annales Henri Poincaré*, 2007, vol. 8, no. 1, pp. 109–134. DOI: 10.1007/s00023-006-0302-8

18. Golovina A.M. Investigations in the spectral properties of operators with distant perturbations (survey). *Matematika i matematicheskoe modelirovanie* [Mathematics & Mathematical Modelling], 2015, no. 2, pp. 1–22. DOI: 10.7463/mathm.0215.0776859 (in Russian)

19. Golovina A.M. Discrete eigenvalues of periodic operators with distant perturbations. *J. of Mathematical Sciences*, 2013, vol. 189, no. 3, pp. 342–364. DOI: 10.1007/s10958-013-1192-1

20. Golovina A.M. On the spectrum of elliptic operators with distant perturbation in the space. *St. Petersburg Mathematical J.*, 2014, vol. 25, no. 5, pp. 735–754. DOI: 10.1007/S1061-0022-2014-01314-3

21. Golovina A.M. On the discrete spectrum of periodic differential operators with a distant perturbation. *Doklady Mathematics*, 2013, vol. 87, no. 1, pp. 42–44. DOI: 10.1134/S106456241301016X

22. Golovina A.M. On the resolvent of elliptic operators with distant perturbations in the space. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 2012, vol. 19, no. 2, pp. 182–192. DOI: 10.1134/S1061920812020045

23. Golovina A.M. Resolvents of operators with distant perturbations. *Mathematical Notes*, 2012, vol. 91, no. 3, pp. 435–438. DOI: 10.1134/S0001434612030133

24. Golovina A.M. *Rezol'venty i spektry periodicheskikh operatorov s razbegayuschimisia vozmuscheniiamiia. Kand. diss.* [Resolvents and spectra of periodic operators with distant perturbations. Cand. diss.] Ufa, 2013. 116 p. (in Russian).

25. Golovina A.M. *Rezol'venty i spektry periodicheskikh operatorov s razbegayuschimisia vozmuscheniiamiia. Avtoref. diss.* [Resolvents and spectra of periodic operators with distant perturbations. Abstract of cand. diss.]. Ufa, 2013. 18 p. (in Russian).

26. Borisov D.I., Golovina A.M. On the resolvents of periodic operators with distant perturbations. *Ufimskij Matematicheskij Zhurnal* [Ufa Mathematical J.], 2012, vol. 4, no. 2, pp. 65–73. (in Russian)

27. Borisov D.I. Discrete spectrum of an asymmetric pair of waveguides coupled through a window. *Sbornik: Mathematics*, 2006, vol. 197, no. 4, pp. 475–504. DOI: 10.1070/SM2006v197n04ABEH003767

28. Gadyl'shin R.R. Local perturbations of the Schrodinger operator on the axis. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2002, vol. 132, no. 1, pp. 976–986. DOI: 10.1023/A:1019615509634

29. Kato T. *Perturbation theory for linear operators*. B.; N.Y.: Springer, 1966. (Russ. ed.: Kato T. Teoriia vozmuschenij linejnykh operatorov. Moscow: Mir Publ., 1972. 740 p.).

30. Markushevich A.I. *Teoriia analiticheskikh funktsij* [The theory of analytic functions]. Vol. 1-2. Moscow: Nauka Publ., 1967-1968. (in Russian)