

УДК 536.2

## Вариационная формулировка задачи стационарной теплопроводности в пластине при возрастающем с температурой коэффициенте поглощения проникающего излучения

Зарубин В. С.<sup>1,\*</sup>, Кувыркин Г. Н.<sup>1</sup>, Савельева И. Ю.<sup>1</sup>

[\\*fn2@bmstu.ru](mailto:fn2@bmstu.ru)

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

---

Представлена дифференциальная форма математической модели, описывающей установившийся процесс переноса тепловой энергии в пластине, материал которой обладает свойством поглощать проникающее излучение с интенсивностью, нелинейно возрастающей с увеличением локального значения температуры. Проведено преобразование указанной формы модели к вариационной формулировке соответствующей нелинейной задачи стационарной теплопроводности. Эта формулировка содержит функционал, стационарные точки которого соответствуют как экстремальным значениям (минимуму и/или максимуму), так и объединению экстремумов, образующему точку перегиба на графике зависимости функционала от коэффициента функции, аппроксимирующей одномерное распределение температуры в пластине. Показано, что реализуемому в пластине установившемуся температурному состоянию отвечают лишь стационарные точки, отвечающие одному или двум минимальным значениям функционала. Путем анализа стационарных точек функционала установлены условия, при которых в рассматриваемой пластине возможна реализация установившегося распределения температуры

**Ключевые слова:** пластина; установившееся температурное состояние; проникающее излучение; объемное энерговыделение; вариационная формулировка задачи

---

### Введение

В технике находят применение конструкционные и теплозащитные материалы, которые в условиях радиационного воздействия поглощают излучение как на поверхности, так и в объеме [1]. Процессы поглощения проникающего излучения материалами и элементами конструкций характерны для ряда технологических операций и эксплуатационных режимов для различных технических устройств. Поглощение проникающего в объем материала излучения может существенно повлиять на температурное состояние и работоспособность конструкции, выполненной из такого материала [2].

Процесс поглощения материалом проникающего излучения связан с переходом энергии электромагнитной волны в энергию возбуждения микрочастиц этого материала, что в

конечном итоге приводит к повышению внутренней энергии и росту температуры. При прохождении излучения через слой материала плотность его потока, а значит и энергия проникающего излучения уменьшаются по экспоненциальному закону с увеличением расстояния от облучаемой поверхности слоя, экспериментально установленному французским физиком П. Бугером и носящему его имя [3]. В общем случае некоторая доля этой энергии излучается и рассеивается в объеме материала, а остальная часть поглощается [4, 5]. Основой математической модели, описывающей эти процессы, является уравнение переноса энергии излучения [1, 4].

При математическом моделировании термомеханических процессов [6, 7, 8] возникает необходимость учитывать влияние проникающего излучения на температурное состояние материалов и элементов конструкций. При этом закон Бугера применяют и тогда, когда допустимо пренебречь объемным излучением и рассеянием проникающего излучения в материале, но необходимо учитывать его поглощение. В таком случае отрицательный показатель экспоненциальной функции представляют произведением расстояния от облучаемой поверхности и интегрального или некоторого усредненного коэффициента поглощения, постоянного для данного материала и спектрального состава проникающего излучения. Однако с увеличением мощности проходящего через слой материала излучения возникает зависимость коэффициента поглощения от локальной интенсивности этого излучения [5]. Кроме того, может быть существенной зависимость этого коэффициента от локального значения температуры материала, отражающая упомянутую выше связь поглощения энергии электромагнитной волны с возбуждением микрочастиц материала. Этот процесс можно описать при помощи функции распределения Больцмана [4, 9], содержащей энергию активации микрочастиц и локальное значение температуры.

В данной работе представлена вариационная формулировка [10] нелинейной задачи стационарной теплопроводности в пластине для случая, когда коэффициент поглощения проникающего излучения в соотношении для закона Бугера зависит от локального значения температуры. Эта формулировка включает функционал [7], который может иметь несколько стационарных точек, соответствующих различным установившимся температурным состояниям пластины. Анализ свойств этого функционала позволил выделить стационарные точки, соответствующие реализуемым распределениям температуры в пластине.

## 1. Постановка задачи

Пластина из однородного полупрозрачного материала с коэффициентом теплопроводности  $\lambda = \text{const}$  имеет толщину  $h$ . Одна из поверхностей пластины идеально теплоизолирована, а на другой происходит конвективно-радиационный теплообмен с внешней средой, имеющей температуру  $T^*$ . Интенсивность конвективного теплообмена определяет коэффициент теплообмена  $\alpha = \text{const}$ . Падающий на поверхность теплообмена поток излучения плотностью  $q$  частично отражается, частично поглощается на поверхности и частично

проникает внутрь пластины. Соответствующие доли плотности этого потока определяют коэффициенты  $A$  поглощения,  $R$  отражения и  $D$  пропускания, которые в литературе по радиационному теплообмену обычно называют поглощательной, отражательной и пропускательной способностями [4]. Значения этих безразмерных коэффициентов удовлетворяют равенству  $A + R + D = 1$ .

Примем, что прошедший через поверхность теплообмена поток излучения плотностью  $Dq$  поглощается в объеме пластины в силу уменьшения его плотности согласно закону Бугера

$$q'(z) = Dq \exp(-\gamma(T)z), \quad (1)$$

где  $\gamma(T)$  — зависящий от локального значения температуры  $T$  коэффициент поглощения проникающего излучения, называемый также коэффициентом ослабления потока излучения [1], а  $z$  — координата, отсчитываемая от поверхности теплообмена по нормали к ней в сторону идеально теплоизолированной поверхности пластины. Одним из вариантов функции  $\gamma(T)$  может быть соответствующая распределению Больцмана экспоненциальная зависимость вида

$$\gamma(T) = \gamma_0 \exp\left(-\frac{W}{k_0 T}\right), \quad (2)$$

где  $\gamma_0$  — предэкспоненциальный коэффициент, фиксированный для рассматриваемого материала пластины;  $W$  — энергия активации микрочастиц материала, влияющих на процесс объемного поглощения излучения;  $k_0 = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К — постоянная Больцмана.

Установившееся распределение  $T(z)$  температуры в пластине удовлетворяет нелинейному однородному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка [11]

$$\lambda \frac{d^2 T(z)}{dz^2} + q_V(T, z) = 0. \quad (3)$$

Здесь  $q_V(T, z)$  — зависящая от температуры и координаты объемная мощность энерговыделения, измеряемая в Вт/м<sup>3</sup> и с учетом формул (1) и (2) равная

$$q_V(T, z) = -\frac{dq'(z)}{dz} = Dq\gamma_0 \exp\left(-\frac{W}{k_0 T}\right) \exp\left(-\gamma_0 z \exp\left(-\frac{W}{k_0 T}\right)\right). \quad (4)$$

На поверхностях пластины должны быть выполнены граничные условия

$$\lambda \frac{dT}{dz} \Big|_{z=0} = \alpha(T(0) - T^*) - Aq + \varepsilon\sigma_0(T(0))^4 = 0, \quad \frac{dT(z)}{dz} \Big|_{z=h} = 0, \quad (5)$$

где  $\varepsilon$  — коэффициент излучения поверхности (ее излучательная способность), а  $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$  — постоянная Стефана — Больцмана.

Уравнение (3) и граничные условия (5) входят в дифференциальную форму математической модели, описывающей установившееся распределение температуры в рассматриваемой пластине. Для количественного анализа этой модели необходимо использовать приближенные методы [12], поскольку для сформулированной нелинейной задачи стационарной теплопроводности в общем случае не удастся получить точное аналитическое решение. В случае

нелинейной задачи возможна неединственность решения, выявить которую при использовании известных приближенных методов решения нелинейных дифференциальных уравнений достаточно трудно. В такой ситуации одна из возможностей выявления неединственности решения задачи связана с переходом от дифференциальной формы математической модели к эквивалентной вариационной форме.

## 2. Вариационная формулировка задачи

Перед построением вариационной формы математической модели перейдем к безразмерному виду уравнения (3) и граничных условий (5), введя безразмерные величины

$$\zeta = \frac{z}{h}, \quad \Theta = \frac{k_0 T}{W}, \quad \beta = \frac{Dq\gamma_0 h^2 k_0}{\lambda W}, \quad \bar{\gamma}_0 = \gamma_0 h, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha h}{\lambda},$$

$$\Theta^* = \frac{(T^* + Aq/\alpha)k_0}{W}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon\sigma_0 h(W/k_0)^4}{\lambda}.$$

Тогда уравнение (3) с учетом формулы (4) примет вид

$$\frac{d^2\Theta(\zeta)}{d\zeta^2} + \beta \exp\left(\bar{\gamma}_0\zeta \exp\left(-\frac{1}{\Theta(\zeta)}\right) - \frac{1}{\Theta(\zeta)}\right) = 0, \quad (6)$$

а граничные условия (5) перейдут в равенства

$$\bar{\alpha}(\Theta(0) - \Theta^*) + \bar{\varepsilon}(\Theta(0))^4 - \frac{d\Theta}{d\zeta}\Big|_{\zeta=0} = 0, \quad \frac{d\Theta}{d\zeta}\Big|_{\zeta=1} = 0. \quad (7)$$

Умножив уравнение (6) на вариацию  $\delta\Theta(\zeta)$  и проинтегрировав это произведение по толщине пластины, запишем

$$\int_0^1 \frac{d^2\Theta(\zeta)}{d\zeta^2} \delta\Theta(\zeta) d\zeta - \beta \int_0^1 \exp\left(\bar{\gamma}_0\zeta \exp\left(-\frac{1}{\Theta(\zeta)}\right) - \frac{1}{\Theta(\zeta)}\right) \delta\Theta(\zeta) d\zeta = 0.$$

После вычисления первого интеграла в левой части этого равенства получим

$$\frac{d\Theta(\zeta)}{d\zeta}\Big|_{\zeta=1} \delta\Theta(1) - \frac{d\Theta(\zeta)}{d\zeta}\Big|_{\zeta=0} \delta\Theta_0 - \int_0^1 \frac{d\Theta(\zeta)}{d\zeta} \delta\Theta(\zeta) d\zeta.$$

Заменив первый интеграл этим результатом и вычтя после этого указанное равенство из результатов умножения соотношений (7) соответственно на  $\delta\Theta(0)$  и  $\delta\Theta(1)$ , запишем

$$\int_0^1 \frac{d\Theta(\zeta)}{d\zeta} \delta\Theta(\zeta) d\zeta - \beta \int_0^1 \exp\left(\bar{\gamma}_0\zeta \exp\left(-\frac{1}{\Theta(\zeta)}\right) - \frac{1}{\Theta(\zeta)}\right) \delta\Theta(\zeta) d\zeta +$$

$$+ \left(\bar{\alpha}(\Theta(0) - \Theta^*) + \bar{\varepsilon}(\Theta(0))^4\right) \delta\Theta(0) = 0. \quad (8)$$

Равенство (8) соответствует условию  $\delta J[\Theta, \delta\Theta] = 0$  стационарности [13] функционала

$$J[\Theta] = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{d\Theta(\zeta)}{d\zeta}\right)^2 d\zeta - \beta \int_0^1 d\zeta \int_0^{\Theta(\zeta)} \exp\left(-\bar{\gamma}_0 \exp\left(-\frac{1}{\Theta}\right) - \frac{1}{\Theta}\right) d\Theta +$$

$$+ \bar{\alpha}\Theta(0) \frac{\Theta(0) - 2\Theta^*}{2} + \frac{\bar{\varepsilon}}{5}(\Theta(0))^5. \quad (9)$$

Этот функционал допустимо рассматривать на множестве непрерывных и кусочно дифференцируемых в интервале  $(0; 1)$  функций  $\Theta(\zeta)$ .

В стационарной точке функционал (9), соответствующий задаче стационарной теплопроводности при нелинейной зависимости от температуры объемной мощности энерговыделения в пластине, может принимать экстремальные значения (минимальное или максимальное), причем возможно объединение экстремальных точек в точку перегиба на графике зависимости этого функционала от одного из определяющих параметров. Для данного функционала реализуемому в пластине установившемуся распределению температуры отвечает лишь точка минимума, а стационарные точки иного типа соответствуют распределениям, которые нереализуемы в качестве установившихся [11]. Типы стационарных точек удастся установить из анализа свойств рассматриваемого функционала.

### 3. Анализ свойств функционала

С целью сокращения числа параметров при анализе свойств функционала (9) вместо граничного условия на поверхности пластины при  $\zeta = 0$ , определяемого первым равенством (7), зададим на этой поверхности значение  $\Theta_0$  безразмерной температуры. В этом случае функционал примет вид

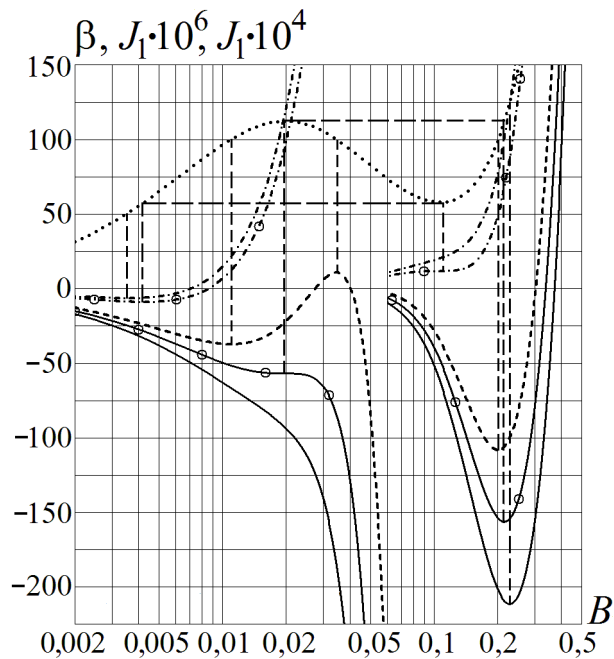
$$J_1[\Theta] = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{d\Theta(\zeta)}{d\zeta} \right)^2 d\zeta - \beta \int_0^1 d\zeta \int_{\Theta_0}^{\Theta(\zeta)} \exp\left(-\bar{\gamma}_0 \zeta \exp\left(-\frac{1}{\Theta}\right) - \frac{1}{\Theta}\right) d\Theta, \quad (10)$$

а допустимые функции должны удовлетворять условию  $\Theta(0) = \Theta_0$ . Из формулы (10) следует, что функционал  $J_1$  зависит от параметров  $\beta$  и  $\gamma_0$  и значений коэффициентов в формуле, аппроксимирующей распределение температуры по толщине пластины.

Сначала рассмотрим свойства функционала в случае аппроксимации этого распределения формулой  $\Theta_1(\zeta) = \Theta_0 + B(1 - (1 - \zeta)^2)$ , удовлетворяющей не только условию  $\Theta(0) = \Theta_0$ , но и граничному условию на идеально теплоизолированной поверхности пластины, определяемому вторым равенством (7). После подстановки этой формулы в соотношение (10) коэффициент  $B$  следует найти из условия

$$\frac{\partial J_1}{\partial B} = \frac{4}{3}B - \beta \int_0^1 \left(1 - (1 - \zeta)^2\right) \exp\left(-\bar{\gamma}_0 \zeta \exp\left(-\frac{1}{\Theta_1(\zeta)}\right) - \frac{1}{\Theta_1(\zeta)}\right) d\zeta = 0 \quad (11)$$

стационарности функционала (10). Это равенство не удастся разрешить относительно коэффициента  $B$ , но связь этого коэффициента с параметром  $\beta$  можно представить графически в виде зависимости  $\beta$  от  $B$ . На рис. 1 в полулогарифмических координатах с использованием равенства (11) пунктирной кривой представлен график такой зависимости при гипотетически выбранных значениях  $\Theta_0 = 0,11$  и  $\gamma_0 = 100$ . Эта зависимость имеет два экстремума: максимум с ординатой  $\beta^* \approx 112,2$  и абсциссой  $B^* \approx 0,0198$ ; минимум с ординатой  $\beta_* \approx 57,8$  и абсциссой  $B_* \approx 0,108$  (указанные значения найдены путем представления средней части



**Рис. 1.** Зависимости параметра  $\beta$  и функционала  $J_1$  от коэффициента  $B$

равенства (11) в виде функции  $f(B, \beta)$  двух переменных с последующим решением задачи безусловной минимизации [14, 15] для функции  $(f(B, \beta))^2$ . Все остальные графики соответствуют зависимостям  $J_1$  от  $B$  при фиксированных значениях  $\beta$  и принятых значениях  $\Theta_0$  и  $\gamma_0$ . Эти графики при  $B < ,06$  построены с увеличением ординат в  $10^6$  раз, а при  $B \geq 0,06$  — в  $10^4$  раз.

Характер зависимости функционала  $J_1$  от коэффициента  $B$  существенным образом определяется особенностями зависимости от этого коэффициента параметра  $\beta$  и конкретными значениями этого параметра. При  $B = 0$  параметр  $\beta$  и значение функционала равны нулю. Если  $\beta < \beta_*$ , то функционал достигает единственного минимального значения. На рис. 1 при  $\beta = 50$  абсциссы минимума на штрихпунктирной кривой и точки на графике зависимости параметра  $\beta$  от коэффициента  $B$  при выбранном значении этого параметра совпадают и равны 0,00352, что отмечено вертикальной штриховой линией. Минимальное значение функционала в данном случае равно  $-6,483 \cdot 10^{-6}$ .

Если  $\beta = \beta_*$ , то наряду с минимумом на графике зависимости  $J_1$  от  $B$  (штрихпунктирная кривая с кружками на рис. 1) возникает точка перегиба (горизонтальная штриховая линия на рисунке соединяет точки на пунктирной кривой, абсциссы которых соответствуют минимуму и точке перегиба). Температурное состояние пластины, соответствующее абсциссе  $B_*$  точки перегиба, является неустойчивым. При малом отклонении параметра  $\beta$  от значения  $\beta_*$  вниз установившееся распределение температуры в пластине будет определять существенно меньшее значение коэффициента  $B$ , соответствующее минимуму на этой кривой, а при отклонении вверх вместо точки перегиба на графике зависимости  $J_1$  от  $B$  возникнет пара экстремумов (максимум при значении абсциссы  $B < B_*$  и минимум при значении абсциссы  $B > B_*$ ). В интервале значений  $\beta \in (\beta_*, \beta^*)$  график зависимости  $J_1$  от  $B$  имеет в

общей сложности три экстремума — два минимума, соответствующие устойчивым температурным состояниям пластины, и один максимум, отвечающий неустойчивому состоянию. На рис. 1 взаимное расположение трех экстремумов на штриховой линии соответствует значению  $\beta = 100$ .

При  $\beta = \beta^*$  на графике зависимости  $J_1$  от  $B$  (сплошная кривая с кружками) также возникает точка перегиба, но теперь абсцисса  $B^*$  этой точки меньше абсциссы минимума, равной 0,214 и соответствующей устойчивому распределению температуры в пластине, а точка перегиба отвечает неустойчивому температурному состоянию. Наконец, в случае  $\beta > \beta^*$  на графике зависимости  $J_1$  от  $B$  (сплошная кривая без символов) будет лишь единственный экстремум — минимум (при  $\beta = 125$  его абсцисса равна 0,228).

Для сравнения на рис. 2 представлены графики зависимостей, аналогичных приведенным на рис. 1, но при аппроксимации распределения температуры в пластине формулой  $\Theta_2(\zeta) = C \sin(\pi\zeta/2) + \Theta_0$ . В этом случае коэффициент  $C$  должен удовлетворять условию

$$\frac{\partial J_1}{\partial C} = \frac{\pi^2}{8}C - \beta \int_0^1 \exp\left(-\bar{\gamma}_0\zeta \exp\left(-\frac{1}{\Theta_2(\zeta)}\right) - \frac{1}{\Theta_2(\zeta)}\right) \sin \frac{\pi\zeta}{2} = 0.$$

Построенный с использованием этого равенства график зависимости параметра  $\beta$  от коэффициента  $C$  (пунктирная кривая на рис. 2) при прежних значениях  $\Theta_0 = 0,11$  и  $\gamma_0 = 100$  имеет максимум с ординатой  $\beta^* \approx 110,5$  и абсциссой  $C^* \approx 0,0199$ , а минимум с ординатой  $\beta_* \approx 58,0$  и абсциссой  $C_* \approx 0,106$ . Эти значения найдены также путем решения указанной выше задачи безусловной минимизации функции двух переменных и достаточно близки к значениям, полученным при аппроксимации распределения температуры квадра-

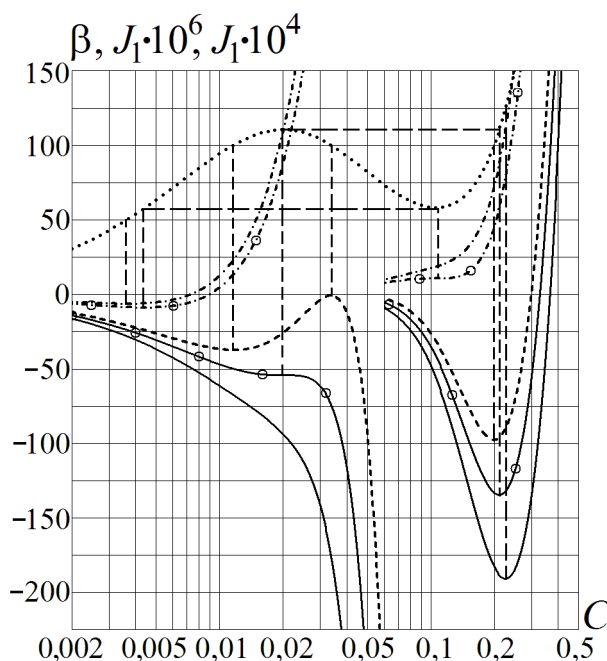


Рис. 2. Зависимости параметра  $\beta$  и функционала  $J_1$  от коэффициента  $C$

тичной зависимостью. Также мало отличие графиков зависимости функционала  $J_1$  от  $C$  (обозначения кривых аналогичны рис. 1) от соответствующих графиков на рис. 1.

Несмотря на малое отличие результатов при использовании двух рассмотренных формул, аппроксимирующих распределения температуры в пластине, с прикладной точки зрения целесообразно располагать количественной мерой погрешности, соответствующей каждой из формул. Истинному распределению  $\Theta^*(\zeta)$  безразмерной температуры в рассматриваемой пластине соответствует безразмерная плотность  $q^*(\zeta) = -\frac{d\Theta^*(\zeta)}{d\zeta}$  теплового потока, удовлетворяющая условию

$$\frac{dq^*(\zeta)}{d\zeta} = \beta \exp\left(\bar{\gamma}_0 \zeta \exp\left(-\frac{1}{\Theta^*(\zeta)}\right) - \frac{1}{\Theta^*(\zeta)}\right), \quad (12)$$

следующему из уравнения (6). Приближенное распределение  $\Theta(\zeta)$  безразмерной температуры в общем случае не удовлетворяет уравнению (6), которое следует из закона сохранения энергии. Этот закон не будет нарушен, если плотность  $q(\zeta)$  теплового потока, соответствующую функции  $\Theta(\zeta)$ , определить соотношением

$$q(\zeta) = \beta \int_0^\zeta \exp\left(\bar{\gamma}_0 \zeta \exp\left(-\frac{1}{\Theta(\zeta)}\right) - \frac{1}{\Theta(\zeta)}\right) d\zeta, \quad (13)$$

получаемым из равенства (12) после замены в нем  $\Theta_*(\zeta)$  на  $\Theta(\zeta)$  и учитывая, что  $q(1) = 0$  на идеально теплоизолированной поверхности пластины при  $\zeta = 1$ . Но при этом в общем случае не будет выполнено равенство  $q(\zeta) + \frac{d\Theta(\zeta)}{d\zeta} = 0$ , следующее из закона теплопроводности Фурье [11]. Величину

$$\Delta = \int_0^1 \left( q(\zeta) + \frac{d\Theta(\zeta)}{d\zeta} \right)^2 d\zeta \quad (14)$$

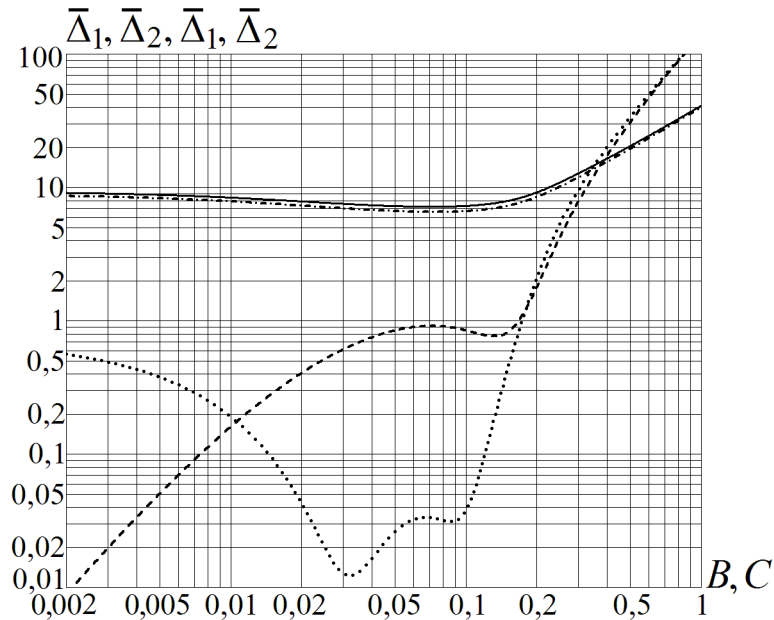
можно рассматривать как интегральную меру погрешности, вызванной приближенным представлением распределения безразмерной температуры в пластине функцией  $\Theta(\zeta)$ , и использовать ее при сравнительной оценке близости функций  $\Theta_1(\zeta)$  и  $\Theta_2(\zeta)$  к функции  $\Theta^*(\zeta)$ .

Необходимо отметить, что интегральная оценка погрешности, определяемая формулой (14), совпадает с результатом, который следует из сопоставления значений альтернативных функционалов, составляющих двойственную вариационную формулировку нелинейной задачи стационарной теплопроводности [7, 11] рассматриваемой задачи. Альтернативный функционал по отношению к функционалу (9) определен не только на допустимых распределениях температуры, но и на связанных с ними распределениях плотности теплового потока. Стационарные точки альтернативных функционалов на истинных распределениях совпадают, а на приближенных разность значений этих функционалов определяет формула вида (14).

Из соотношений (13) и (14) следует, что величина  $\Delta$  при использовании функции  $\Theta_1(\zeta)$  имеет коэффициент пропорциональности  $B^2$ , а при использовании функции  $\Theta_2(\zeta)$  — коэффициент пропорциональности  $C^2$ . Поэтому при сравнительной оценке погрешностей,



вызванных применением этих функций, целесообразно сопоставлять значения  $\bar{\Delta}_1 = \Delta/B^2$  и  $\bar{\Delta}_2 = \Delta/C^2$ . На рис. 3 в логарифмических координатах построены графики зависимостей  $\bar{\Delta}_1$  от  $B$  (сплошная кривая) и  $\bar{\Delta}_2$  от  $C$  (штрихпунктирная кривая) при принятых выше значениях  $\Theta_0 = 0,11$  и  $\bar{\gamma}_0 = 100$ . Из сравнения этих графиков следует, что применение функции  $\Theta_2(\zeta)$  приводит к несколько меньшей погрешности во всем рассмотренном интервале изменения коэффициента  $C$ .



**Рис. 3.** Зависимости интегральной погрешности от коэффициентов аппроксимирующих функций

Дополнительно на рис. 3 представлены графики зависимости от коэффициентов  $B$  и  $C$  интегралов  $\bar{\Delta}'_1$  и  $\bar{\Delta}'_2$  от квадрата невязки, возникающей в уравнении (6) при подстановке в него соответственно функций  $\Theta_1(\zeta)$  (штриховая линия) и  $\Theta_2(\zeta)$  (пунктирная линия). Видно, что при  $B = C \leq 0,01$  предпочтение при аппроксимации распределения безразмерной температуры в рассматриваемой пластине следует отдать квадратичной функции  $\Theta_1(\zeta)$ , а при последующем возрастании этих коэффициентов меньшую погрешность сначала обеспечивает использование тригонометрической функции  $\Theta_2(\zeta)$ , но при  $B = C \geq 0,2$  применение этих функций можно считать равноценным.

Влияние изменения параметров  $\Theta_0$  и  $\gamma_0$  на зависимость параметра  $\beta$  от коэффициента  $C$  в аппроксимирующей функции  $\Theta_2(\zeta)$  показано на рис. 4, где пунктирной линией представлен график этой зависимости при выбранных выше значениях  $\Theta_0 = 0,11$  и  $\bar{\gamma}_0 = 100$ . Уменьшение  $\Theta_0$  при фиксированном значении  $\bar{\gamma}_0 = 100$  не изменяет характер зависимости  $\beta$  от  $C$ , но увеличивает разность между экстремальными значениями  $\beta$  и в меньшей степени разность между абсциссами, соответствующими точкам экстремумов (штрихпунктирная кривая построена при  $\Theta_0 = 0,106$  и расположена выше пунктирной кривой). Наоборот, увеличение  $\Theta_0$  приводит к сближению экстремальных значений вплоть до слияния

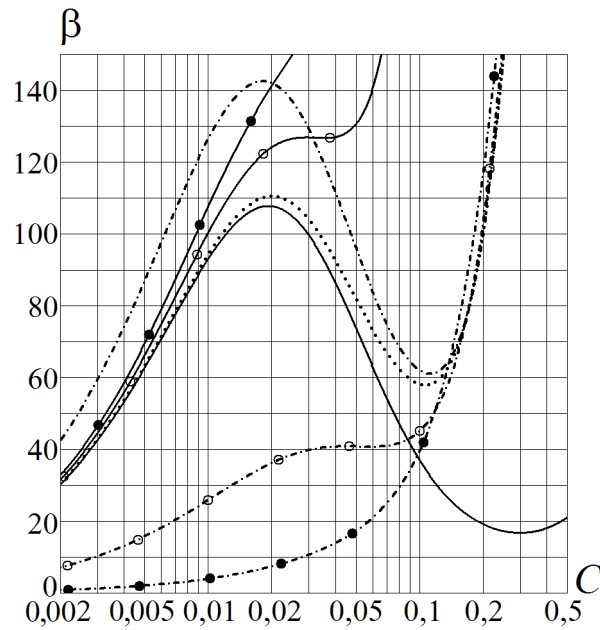


Рис. 4. Влияние параметров  $\Theta_0$  и  $\bar{\gamma}_0$  на зависимость  $\beta$  от  $C$

точек экстремумов и возникновения на графике точки перегиба с касательной, параллельной оси абсцисс (штрихпунктирная кривая со светлыми кружками при  $\Theta_0 \approx 0,132$ ). Если  $\Theta_0 > 0,132$ , то зависимость  $\beta$  от  $C$  становится монотонно возрастающей (штрихпунктирная кривая с темными кружками при  $\Theta_0 = 0,2$ ), т.е. функционал (10) в этом случае имеет единственный минимум во всем промежутке изменения коэффициента  $C$ .

При фиксированном значении  $\Theta_0 = 0,11$  уменьшение  $\bar{\gamma}_0$  также не изменяет характера зависимости  $\beta$  от  $C$  и также увеличивает разность между экстремальными значениями  $\beta$ , но теперь сплошная кривая на рис. 4, построенная при  $\bar{\gamma}_0 = 10$ , расположена ниже пунктирной кривой. С увеличением  $\bar{\gamma}_0$  происходит сближение экстремальных значений зависимости  $\beta$  от  $C$  вплоть до слияния точек экстремумов при  $\bar{\gamma}_0 \approx 520$  (сплошная кривая со светлыми кружками). Последующее увеличение  $\bar{\gamma}_0$  приводит к монотонному возрастанию  $\beta$  с ростом коэффициента  $C$  (сплошная кривая с темными кружками при  $\bar{\gamma}_0 = 1000$ ), что соответствует единственному минимуму функционала (10).

Таким образом, изменение значений как  $\Theta_0$ , так и  $\bar{\gamma}_0$  вызывает аналогичные перестройки характера зависимости  $\beta$  от  $C$ , причем с увеличением этих значений уменьшается промежуток значений  $\beta$ , соответствующий наличию у функционала (10) трех стационарных точек (двух минимумов и одного максимума). Вырождению этого промежутка путем объединения экстремальных точек зависимости  $\beta$  от коэффициента  $C$  отвечает объединение одного из минимумов функционала с максимумом, что приводит к единственности минимума данного функционала, т.е. к единственному возможному установившемуся распределению температуры в пластине. Следует отметить, что анализ влияния изменения параметров  $\Theta_0$  и  $\gamma_0$  на зависимость параметра  $\beta$  от коэффициента  $B$  в аппроксимирующей функции  $\Theta_1(\zeta)$  дает такие же результаты.

## Заключение

Из проведенного анализа свойств функционала, входящего в вариационную формулировку задачи стационарной теплопроводности в пластине из материала, интенсивность поглощения проникающего излучения которым возрастает с температурой, следует, что стационарные точки этого функционала соответствуют не только экстремальным значениям (минимуму и/или максимуму), но и объединению экстремумов, образующему точку перегиба на графике зависимости функционала от коэффициента функции, аппроксимирующей распределение температуры в пластине, причем реализуемому в пластине установившемуся температурному состоянию отвечают лишь точки минимума (одна или две). Полученный результат показывает, что вариационная формулировка данной задачи позволяет прогнозировать условия, при которых в рассматриваемой пластине возможно существование установившегося распределения температуры.

Работа выполнена по гранту МК-6573.2015.8 программы Президента РФ государственной поддержки молодых кандидатов наук, а также в рамках проекта 1712 по государственному заданию № 2014/104 Минобрнауки РФ и государственного задания по проекту № 1.2640.2014.

## Список литературы

1. Елисеев В.Н., Товстоног В.А. Теплообмен и тепловые испытания материалов и конструкций аэрокосмической техники при радиационном нагреве. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 396 с.
2. Зарубин В.С. О работоспособности оболочки с объемным поглощением проникающего излучения // Труды МВТУ им. Н.Э. Баумана. 1974. № 205. С. 105–109.
3. Зигель Р., Хаузл Дж. Теплообмен излучением: пер. с англ. М.: Мир, 1975. 936 с.
4. Мучник Г.Ф., Рубашов И.Б. Методы теории теплообмена. Ч. 2. Тепловое излучение. М.: Высшая школа, 1974. 272 с.
5. Физический энциклопедический словарь / Гл. ред. А.М. Прохоров. М.: Сов. энциклопедия, 1983. 928 с.
6. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математическое моделирование термомеханических процессов при интенсивном тепловом воздействии // Теплофизика высоких температур. 2003. Т. 41. № 2. С. 300–309.
7. Зарубин В.С., Станкевич И.В. Расчет теплонапряженных конструкций. М.: Машиностроение, 2005. 352 с.
8. Зарубин В.С. Моделирование. М.: Издательский центр «Академия», 2013. 336 с.
9. Глаголев К.В., Морозов А.Н. Физическая термодинамика. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. 272 с.

10. Зарубин В.С., Селиванов В.В. Вариационные и численные методы механики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. 360 с.
11. Зарубин В.С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. М.: Энергоатомиздат, 1983. 328 с.
12. Власова Е.А., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Приближенные методы математической физики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 700 с.
13. Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 488 с.
14. Аттетков А.В., Зарубин В.С., Канатников А.Н. Введение в методы оптимизации. М.: НИЦ ИНФРА-М, 2008. 272 с.
15. Аттетков А.В., Зарубин В.С., Канатников А.Н. Методы оптимизации. М.: ИЦ РИОР, 2012. 270 с.

## A Variationally Formulated Problem of the Stationary Heat Conduction in a Plate with Radiation Reduction Factor Increased under Temperature

Zarubin V. S.<sup>1,\*</sup>, Kuvyrkin G. N.<sup>1</sup>, Savel'eva I. Yu.<sup>1</sup>

\* [fn2@bmstu.ru](mailto:fn2@bmstu.ru)

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Russia

---

**Keywords:** slice, the steady state temperature, penetrating radiation, volumetric energy release, variational formulation of the problem

---

The equipment uses heat-shielding and structural materials that, when exposed, absorb radiation both on the surface and in the volume. In a variety of technical devices, absorption processes of penetrating radiation of materials and structural elements are typical for a number of process steps and operating conditions. Absorption of radiation penetrating into material volume may significantly affect the temperature state and runability of construction made of such material.

The process of material-absorbed penetrating radiation is associated with transition of the electromagnetic wave energy into the excitation energy of this material microparticles that, after all, leads to increasing internal energy and temperature growth. With radiation passing through the layer of material its flow density and hence energy of penetrating radiation decreases exponentially with increasing distance from the exposed layer surface. This law was experimentally established by the French physicist P. Bouguer and bears his name. In general, a certain fraction of this energy is radiated and dissipated in the material volume, and the rest is absorbed. A mathematical model describing these processes is an equation of the radiative energy transfer.

In mathematical modeling of thermomechanical processes there is a need to consider the effect of penetrating radiation on the temperature state of materials and construction elements. The P. Bouguer law is used also when the volume radiation and scattering of penetrating radiation in the material can be neglected, but it is necessary to take into account its absorption. In this case, a negative indicator of the exponential function is represented by the product of the distance from the irradiated surface and integral or some average absorption factor that is constant for a given material and spectral distribution of penetrating radiation. However, with increasing power of radiation passing through the material layer there is a dependence of the absorption factor on the local intensity of this radiation. Furthermore, it can be a significant dependence of this factor on the local value of the material temperature, reflecting the above-mentioned relationship between

the absorption of electromagnetic wave energy and the excitation of material microparticles. This process can be described by Boltzmann distribution function that comprises the energy to activate microparticles and the local value of temperature.

This paper presents a variational formulation of the nonlinear problem of stationary heat conduction in a plate for the case when the radiation reduction factor in relation to the Bouguer law depends on the local temperature. This formulation includes a functional that can have several fixed points corresponding to different steady states of the plate temperature. Analysis of the properties of this functional enabled us to identify the stationary points, which correspond to the realized temperature distribution in the plate.

### References

1. Eliseev V.N., Tovstonog V.A. *Teploobmen i teplovye ispytaniya materialov i konstruktssii aerokosmicheskoi tekhniki pri radiatsionnom nagreve* [Heat transfer and thermal tests of materials and aerospace structures with radiant heating]. Bauman MSTU Publishing. Moscow. 396 p. [In Russian].
2. Zarubin V.S. About the performance envelope with volume absorption of penetrating radiation. *Proceedings of the Moscow Higher Technical School*, 1974, no. 205, pp. 105–109. [in Russian]
3. Siegel R., Howell J.R. *Thermal Radiation Heat Transfer*. Taylor and Francis, New York, 2002. 868 p. (Russ. ed.: Siegel R., Howell J.R. *Teploobmen izlucheniem*. Moscow, Mir Publ., 1975. 936 p.).
4. Muchnik G.F., Rubashov I.B. *Metody teorii teploobmena. Part 2. Teplovoe izluchenie* [Methods of heat transfer theory. Part 2. Thermal radiation]. Higher School Publ. Moscow, 1974. 272 p. [In Russian].
5. Prochorov A.M., ed. *Phizicheskii entsiklopedicheskii slovar* [Physical encyclopaedic dictionary]. Soviet Encyclopedia. Moscow, 1983. 928 p. [In Russian].
6. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Mathematical modeling of thermomechanical processes under intense heat exposure. *Teplofizika vysokikh temperatur = High Temperature*, 2003, vol. 41, no. 2, pp. 300–309. [In Russian].
7. Zarubin V.S., Stankevich I.V. *Raschet teplonapryazhennykh konstruktssiy* [Calculation of heat-stressed designs]. Mashinostroenie publ. Moscow, 2005. 352 p. [In Russian].
8. Zarubin V.S. *Modelirovanie* [Modeling]. Publishing Center “Academy”. Moscow, 2013. 336 p. [In Russian].
9. Glagolev K.V., Morozov A.N. *Fizicheskaya termodinamika* [Physical thermodynamics]. Bauman MSTU Publ. Moscow, 2007. 272 p. [In Russian].
10. Zarubin V.S., Selivanov V.V. *Variatsionnye i chislennye metody mekhaniki sploshnoi sredy* [Variational and numerical methods of continuum mechanics]. Bauman MSTU Publ. Moscow, 1993. 360 p. [In Russian].

11. Zarubin V.S. *Inzhenernye metody resheniya zadach teploprovodnosti* [Engineering methods for solving problems of heat conduction]. Energoatomizdat. Moscow, 1983. 328 p. [In Russian].
12. Vlasova E.A., Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Priblizhennye metody matematicheskoy fiziki* [Approximate methods of mathematical physics]. Bauman MSTU Publ. Moscow, 2004. 700 p. [In Russian].
13. Van'ko V.I., Ermoshina O.V., Kuvyrkin G.N. *Variatsionnoe ischislenie i optimal'noe upravlenie* [Variational calculus and optimal control]. Bauman MSTU Publ. Moscow, 2001. 488 p. [In Russian].
14. Attetkov A.V., Zarubin V.S., Kanatnikov A.N. *Vvedenie v metody optimizatsii* [Introduction to Optimization Methods]. INFRA-M. Moscow, 2008. 272 p. [In Russian].
15. Attetkov A.V., Zarubin V.S., Kanatnikov A.N. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. RIOR. Moscow, 2012. 270 p. [In Russian].