Математика и Математическое моделирование
Сетевое издание
МГТУ им. Н.Э. Баумана
http://mathmjournal.ru

Ссылка на статью:
// Математика и математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2016. №4. С. 1–16.
DOI: **10.7463/mathm.0416.0852606**
Представлена в редакцию:

УДК 519.40

Простые кольцевые диаграммы и проблема степенной сопряженности в группах с условиями $C(3)$-$T(6)$

Безверхний Н. В.[1,*]

[*]nbezv@mail.ru

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Данная работа посвящена изучению кольцевых диаграмм над группами, копредставление которых удовлетворяет условиям $C(3)$-$T(6)$, и связанной с ними проблемой степенной сопряженности. Исследования проводятся с помощью метода групповых диаграмм. Основные результаты касаются кольцевых диаграмм с несократимыми граничными метками. Исследуются один из трех типов кольцевых диаграмм над группами из указанного класса. Доказывается, что для кольцевых диаграмм с периодическими метками, внутренний и внешний граничные циклы которых пересекаются, существуют ограничения на длину границы. Это ограничение позволяет в данном частном случае решать проблему степенной сопряженности.

Ключевые слова: условия малого сокращения; диаграмма над группой; проблема степенной сопряженности

Введение

В комбинаторной теории групп для задания группы используют копредставления $G = (X; R)$, где множество X — образующие элементы группы G, а множество R — определяющие соотношения на этих образующих. Из этих соотношений может быть выведено любое соотношение, верное в группе G [1].

Данная работа посвящена группам, обладающим копредставлением с условиями малого сокращения $C(3)$-$T(6)$. С основами комбинаторной теории групп и условиями малого сокращения можно познакомиться в книгах [1, 2, 3].

В данном классе групп были решены различные алгоритмические проблемы: проблема равенства слов, проблема вхождения в циклическую подгруппу, проблема сопряженности, проблема сопряженного вхождения в циклическую подгруппу, проблема корня, дано описание элементов конечного порядка, но не решена проблема степенной сопряженности. Не доказана и неразрешимость данной проблемы.

Таким образом, не известно, существует ли алгоритм, с помощью которого для любого копредставления $G = (X; R)$, удовлетворяющего условиям малого сокращения $C(3)$-$T(6)$, и любых слов w, v в алфавите X можно выяснить, существуют ли целые числа n, m, для которых элементы группы G, представленные словами w^n, v^m, сопряжены в этой группе. (Сопряженность означает существование третьего элемента группы, представленного словом z, для которого $z^{-1}w^nz = v^m$ в группе G.)

Множество всех слов в алфавите X можно разбить на два класса в зависимости от структуры кольцевой диаграммы, одна из двух граничных меток которой содержит в качестве подслова данное слово. Условно назовем их первым и вторым классами. Для одного из этих классов, скажем, для первого, устройство кольцевых диаграмм сопряженности слов на данном этапе исследования не позволяет решить проблему степенной сопряженности. Зато для слов второго класса часть решения проблемы изложена в работе [13], а окончание исследования приводится в данной статье.

Исследование кольцевых диаграмм обосновано следующим фундаментальным фактом. Известно [2, 3], что слова w, v в алфавите X сопряжены в группе G с копредставлением $(X; R)$, если существует кольцевая диаграмма M над этим копредставлением, для которой метки $\varphi(\sigma)$ и $\varphi(\tau)$ внутреннего и внешнего граничных циклов совпадают с v^{-1} и w.

При решении проблемы степенной сопряженности мы сталкиваемся со следующей трудностью: длины обоих слов w^n, v^m ничем не ограничены из-за отсутствия ограничений на показатели n, m. Это не позволяет применить к словам вида w^k, v^l ($k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{Z}$) алгоритм, решающий проблему сопряженности в рассматриваемом классе групп [2], поскольку заранее неизвестно число таких проверок.

Это замечание теряет свою актуальность в случае, когда слова w, v представляют элементы конечного порядка. Действительно, в этом случае проверка сопряженности их степеней сводится к конечному числу применений известного алгоритма решения задачи о сопряженности двух элементов в рассматриваемом классе групп [2]. Для выявления элементов конечного порядка можно пользоваться алгоритмом, аналогичным приведенному в статье [11]. На эту тему можно также обратиться к статье [16]. Поэтому в оставшейся части работы будем считать, что слова w, v представляют элементы бесконечного порядка.

Кольцевые диаграммы с периодическими метками $\varphi(\sigma) \equiv w^n$, $\varphi(\tau) \equiv v^m$ обладают свойством периодичности: области в таких диаграммах при выполнении некоторых дополнительных условий периодически повторяются при обходе границы диаграммы в соответствии с периодичностью метки этой границы. При этом периодичность имеет место не только на границе диаграммы, но и внутри нее: периодически повторяются слои при движении от внешней границы диаграммы к внутренней. Это свойство диаграмм позволяет вырезать из них большую часть и тем самым ограничивать показатели m, n.

Такие идеи были использованы в работе [13] для доказательства разрешимости поставленной задачи в случае, когда диаграмма сопряженности слов w^n, v^m является n-слойной (определения приведены ниже).

Изучению свойств кольцевых диаграмм другого типа, называемых простыми, с периодическими метками посвящена эта работа. Исследования проводятся с использованием геометрических методов комбинаторной теории групп, а именно, метода диаграмм над группами, базирующегося на следующих двух утверждениях [1, 2, 3].

Первое — лемма Ван Кампена, утверждающая, что слово равно единице в группе тогда и только тогда, когда существует односвязная диаграмма с граничной меткой, равной этому слову.

Второе — лемма о сопряженных элементах группы, утверждающая, что слова u, v представляют сопряженные элементы данной группы тогда и только тогда, когда существует кольцевая диаграмма с граничными метками, равными u, v^{-1}.

В дальнейшем мы будем использовать следующие основные обозначения.

$w \sim v$ — слова представляют сопряженные элементы группы;

$|w|$ — длина слова w;

∂D — граница области D;

∂M — граница карты M;

$i(D)$ — число внутренних ребер области D.

Основные понятия теории групп с малыми сокращениями и метода групповых диаграмм будем считать известными [1, 2, 3, 12].

1. Основные факты о диаграммах над группами с условиями $C(3)$-$T(6)$

В этом пункте приводятся основные определения и теоремы о группах с условиями малого сокращения и диаграммах над ними. Эта информация не является новой, и может быть получена из работы [13]. Понятия карты с условиями $C(3)$-$T(6)$ будем считать известными [2, 3, 13]. Граница для M будет обозначаться символом ∂M.

Путь называется приведенным, если он не содержит последовательной пары ребер вида ee^{-1}. Приведенный путь $e_1 \dots e_n$ называется простым, если при $i \neq j$ начальные точки ребер e_i и e_j различны.

Если D — область из M с данной ориентацией, то любой цикл минимальной длины, включающий в себя все ребра из ∂D, в котором все ребра ориентированы в соответствии с ориентацией области D, называется граничным циклом этой области. Если M связна и односвязна, то граничный цикл для M — это цикл α минимальной длины, содержащий все ребра из границы ∂M и не имеющий самопересечений.

Для кольцевой карты M граница $\partial M = \sigma \cup \tau$ — пара граничных циклов: внешний и внутренний.

Будем считать, что граничная метка области читается по часовой стрелке, граничная метка связной односвязной диаграммы — против, внешняя граница кольцевой диаграммы ориентирована против часовой стрелки, а внутренняя — по часовой стрелке.

Подпуть $\partial D \cap \partial M = p$ в граничных циклах области D и диаграммы M, либо в граничных циклах двух областей, называется последовательной частью границы как области D, так и карты M, или двух областей, соответственно [2].

Граничной вершиной в карте M называется любая вершина, принадлежащая граничному циклу карты M. Вершины, не являющиеся граничными, называются внутренними. Внутренним ребром в карте будем считать общую часть граничных циклов двух областей, гомеоморфную отрезку и являющуюся последовательной частью границы обеих областей. Область D называется граничной в карте M, если в ее граничном цикле ∂D есть граничные вершины карты M, т.е. $\partial D \cap \partial M \neq \varnothing$.

Пара областей (D_1, D_2) с общим ребром e в диаграмме M называется сократимой, если граничная метка односвязной поддиаграммы $D_1 \cup D_2$ равна единице в свободной группе F. Если в диаграмме M нет сократимых пар областей, то диаграмма M называется приведенной. Можно определить сократимую пару и в случае многосвязной поддиаграммы $D_1 \cup D_2$ [2].

Группы с условиями малого сокращения. Пусть группа G задана копредставлением $G = (X; R)$. Предположим, что r_1 и r_2 — различные элементы из R, такие, что $r_1 = bc_1$ и $r_2 = bc_2$. В этом случае элемент b называется куском относительно множества R.

Условие $C(p)$. Никакой элемент из R не является произведением менее чем p кусков.

Условие $T(q)$. Пусть $3 \leq h < q$. Предположим, что $r_1, \ldots, r_h$ — элементы из R, такие, что последовательные элементы r_i, r_{i+1} не являются взаимно обратными. Тогда по крайней мере одно из произведений $r_1 r_2, \ldots, r_{h-1} r_h, r_h r_1$ приведено.

Если v — вершина карты M, то $d(v)$ — степень вершины v — есть число неориентированных ребер, инцидентных вершине v. Если оба конца некоторого ребра e совпадают с v, мы считаем e дважды. Если D — область из M, то $d(D)$ — степень области D — есть число ребер в граничном цикле для D. Символ $i(D)$ обозначает число внутренних ребер из D, причем снова ребро, встречающееся в граничном цикле для D дважды, считается два раза.

Следующая теорема дает геометрическую интерпретацию условий $C(p)$ и $T(q)$.

Теорема 1 ([2]). Пусть R — симметризованное множество элементов свободной группы F и M — приведенная R-диаграмма.

1. Если R удовлетворяет условию $C(k)$, то каждая область D из M, такая, что $\partial D \cup \partial M$ не содержит ребер, имеет степень $d(D) \geq k$.

2. Если R удовлетворяет $T(m)$, то каждая внутренняя вершина v карты M имеет степень $d(v) \geq m$.

Обозначим через M_1 подкарту карты M, получающуюся удалением из M всех изолированных вершин. Пусть M — произвольная карта. Граничный слой карты M состоит из всех граничных вершин, ребер, содержащих граничные вершины, и граничных областей карты M.

Сокращения в группах с условиями $C(3)$-$T(6)$. В группах с условиями $C(p)$-$T(q)$ длина произвольного куска может быть отлична от единицы. Но если выполнено условие $q > 4$, то все куски имеют единичную длину [13, 17].

Будем говорить, что в слове w есть R-сокращение [5, 6, 7], если существует элемент $r \in R$, такой, что:

1) $r \equiv r_1 r_2$;

2) $w \equiv w_1 w_2 w_3$;

3) $r_1 \equiv w_2$;

4) слово r_2 либо пусто, либо является куском;

5) слова $w_1 r_2^{-1}$, $r_2^{-1} w_3$ несократимы в свободной группе.

В случае замены слова w равным ему в группе G словом $w_1 r_2^{-1} w_3$ будем говорить, что в w выполнено R-сокращение. R-сокращение в слове w, являющемся степенью некоторого слова v (т.е. $w = v^s$) называется длинным, если $|w_2| \geq |v|$. Если же $|w_2| < |v|$, то R-сокращение называется коротким.

Определим понятие $\bar{R}$-сокращения с использованием диаграмм. Также дадим геометрическое определение R-сокращения. Для этого рассмотрим следующие понятия.

Рассмотрим диаграмму M. Область $D \subset M$ называется дэновской [8], если:

1) $\partial D \cap \partial M$ — последовательная часть границы ∂M (т.е. $\partial D \cap \partial M = p$ — подпуть в граничных циклах области D и диаграммы M);

2) $i(D) \in \{0, 1\}$.

Полосой [8] в диаграмме M называется поддиаграмма $\Pi = \bigcup\limits_{i=1}^{k} D_i$ со свойствами:

1) $\partial D_i \cap \partial M = p$ — последовательная часть границы ∂M;

2) $\partial \Pi \cap \partial M = p$ — последовательная часть границы ∂M;

3) если $k = 3$, то $i(D_1) = i(D_2) = i(D_3) = 2$, причем соседние области имеют общее ребро, а все три области полосы имеют общую вершину;

4) если $k > 3$, $k = 2l + 1$, то $i(D_1) = i(D_2) = i(D_{2l}) = i(D_{2l+1}) = 2$, $i(D_3) = i(D_5) = \ldots = i(D_{2l-3}) = i(D_{2l-1}) = 3$, $i(D_4) = i(D_6) = i(D_{2l-4}) = i(D_{2l-2}) = 2$;

5) $\partial D_i \cap \partial D_{i+1}$ — ребро $(i = 1, \ldots, k-1)$.

Пусть Π — полоса в диаграмме M. Граничным словом области $D_i \subset \Pi$ называется метка пути $\partial D_i \cap \partial M$, прочитанная в соответствии с ориентацией области D_i. Граничным словом полосы Π называется метка пути $\partial \Pi \cap \partial M$, прочитанная в направлении, противоположном ориентации границы ∂M. Аналогично определяется граничное слово дэновской области.

Будем говорить, что в слове v есть R-сокращение, если существует связная односвязная диаграмма M над копредставлением $G = (X; R)$, в которой существует дэновская область, граничное слово которой является подсловом в v. В слове v есть $\bar{R}$-сокращение, если существует связная односвязная диаграмма M над копредставлением $G = (X; R)$, в которой существует полоса Π, граничное слово которой является подсловом в v.

Заметим, что полоса в диаграмме M с циклически несократимой в свободной группе, циклически R-несократимой граничной меткой $\varphi(\partial M)$ является приведенной диаграммой [13].

Для любого циклически несократимого в свободной группе слова w, не равного единице в группе G, существует циклически R-, $\bar{R}$-несократимое слово w_0, сопряженное с w в G [13].

Нормальные формы элементов в группах с условиями $C(3)$-$T(6)$. Слово w_0, сопряженное некоторой степени слова w в группе G и обладающее свойством R-, $\bar{R}$-несократимости всех своих степеней, называется нормальной формой слова w.

Рассмотрим группу $G = (X; R)$. Начнем с того, что для любого циклически несократимого в свободной группе $F = (X; \ )$ слова w, не равного единице в группе G, существует циклически R-, $\bar{R}$-несократимое слово w_0, сопряженное с w в G [13].

Следующие теоремы гарантируют существование нормальных форм, но не обеспечивают их единственности.

Теорема 2 ([6]). Пусть слово w представляет в группе $G = (X; R)$, удовлетворяющей условиям $C(3)$-$T(6)$, элемент бесконечного порядка, причем само слово w циклически несократимо в свободной группе и циклически R-, $\bar{R}$-несократимо. Пусть $m = max_{r \in R}|r|$.

1. Если для некоторого $n' \in \mathbb{N}$ слово $w^{n'}$ R-сократимо, то существует $n \in \mathbb{N}$, $n \leq m$, для которого слово w^n R-сократимо.

2. Если число m' удовлетворяет неравенствам $1 < m' \leq m$ и для некоторой циклической перестановки w^* слово $(w^*)^{m'}$ R-сократимо, причем ни при каком $m'' < m'$ в слове $(w^*)^{m''}$ нет R-сокращений, то в результате выполнения этого сокращения получается слово $w_0 = (w^*)^{m'}$ (равенство в группе G), любая степень которого R-несократима.

Теорема 3 ([6]). Пусть слово w представляет в группе $G = (X; R)$, удовлетворяющей условиям $C(3)$-$T(6)$, элемент бесконечного порядка, причем само слово w циклически $\bar{R}$-несократимо, а все его степени w^n R-несократимы. Тогда верны следующие утверждения.

thesdi. Если слово w^2 $\bar{R}$-несократимо, то любая степень w^n $\bar{R}$-несократима.

thesdi. Если в слове w^2 есть $\bar{R}$-сокращение, то либо все степени слова $w_1 = w^2$ (равенство в группе G), полученного из w^2 в результате этого $\bar{R}$-сокращения, $R, \bar{R}$-несократимы, либо существует конечный алгоритм, строящий последовательность сопряженных в группе G слов $w, w_1, \ldots, w_t$, $t < |w|$, и слово w_t R-, $\bar{R}$-несократимо вместе со своими степенями.

2. Классификация кольцевых диаграмм с несократимыми граничными метками

Приводимая в этом разделе информация о кольцевых диаграмма взята из работ [8, 13].

Рассмотрим кольцевую диаграмму M с границей $\partial M = \sigma \cap \tau$. Предположим, что $\sigma \cap \tau = \varnothing$. Рассмотрим поддиаграмму K_σ, состоящую из областей D, граничные циклы которых содержат вершины из σ. Назовем эту поддиаграмму K_σ-слоем диаграммы M. Рассмотрим диаграмму $M_1 = M \setminus K_\sigma$, полученную из M удалением слоя K_σ. Обозначим граничные циклы диаграммы M_1 через σ_1, τ. Слой K_σ является кольцевой диаграммой с непересекающимися граничными циклами σ, σ_1.

Если $\sigma_1 \cap \tau = \varnothing$, то аналогично определяется слой K_{σ_1} с граничными циклами σ_1, σ_2. Процесс продолжается далее до тех пор, пока $\sigma_i \cap \tau = \varnothing$, в результате определяются слои K_{σ_i}.

Пусть M кольцевая диаграмма с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$ и слова $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ циклически $\bar{R}$-, R-несократимы.

В статье [8] приводится следующая классификация кольцевых диаграмм над группами с условиями $C(p)$-$T(q)$ при $(p,q) \in \{(3,6),\ (4,4),\ (6,3)\}$:

1) вырожденная кольцевая диаграмма M, если $|M| = 0$;

2) простая кольцевая диаграмма M, если ее граничные циклы σ и τ имеют непустое пересечение, и при этом $|M| > 0$, т.е. M содержит хотя бы одну область;

3) k-слойная кольцевая диаграмма M, если после удаления из нее k граничных слоев K_σ, $K_{\sigma_1}, \ldots, K_{\sigma_{k-1}}$ получается вырожденная диаграмма;

4) (C-k)-слойная кольцевая диаграмма M, если после удаления из M k граничных слоев получается простая кольцевая диаграмма. Таким образом, (C-k)-слойная кольцевая диаграмма является объединением простой и k-слойной диаграмм, имеющих общий граничный цикл.

Следует отметить, что данная классификация имеет место только для кольцевых диаграмм с $\bar{R}$-, R-несократимыми граничными метками. Снятие этого требования значительно усложняет структуру кольцевых диаграмм. Это видно из приводимых ниже определений и лемм.

Определение 1. Область $D \subset M$ называется простой, если множество $\partial D \cap \partial M$ связно и является последовательной частью границы области D.

Определение 2. Связная односвязная карта M с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$ называется простым диском, если $\sigma \cap \tau = \{A, B\}$ — две вершины и все области в M простые.

Определение 3. Связная односвязная подкарта M_1 карты M называется островом в M, если $M = M_1 \cup M_2 \cup p$, где p — простой подпуть в ∂M, возможно, нулевой длины, не имеющий ребер в граничных циклах областей карт M_1 и M_2 и имеющий по одной вершине в циклах ∂M_1 и в ∂M_2, $|M_1| > 0$, $|M_2| > 0$. Будем говорить, что M_1 — остров на участке s границы карты M, если граничный цикл ∂M_1 является подпутем в s.

Определение 4. Связная односвязная подкарта M_1 карты M называется полуостровом в M, если существует область $D_0 \subset M$: $M = M_0 \cup D_0 \cup M_1$, $|M_1| > 0$, $|M_2| > 0$, причем карта $M_1 \cup M_0$ не является связной. Будем говорить, что M_1 — полуостров на участке s границы карты M, если граничный цикл ∂M_1 является подпутем в s.

Лемма 1 ([7]). Пусть M — связная односвязная или кольцевая карта. Пусть s — подпуть в граничном цикле ∂M для односвязной карты M или в одном из граничных циклов σ, τ для кольцевой карты M с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$. Тогда, если в карте M нет полос Π и дэновских областей D, для которых $\partial \Pi \cap \partial M$ — подпуть в s и $\partial D \cap \partial M$ — подпуть в s, то в M нет островов и полуостровов на участке границы s.

Так же, как это было сделано для кольцевой диаграммы, можно определить граничные слои K_σ, K_τ для простого диска M с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$.

Определение 5. Пару областей в слое K_σ (K_τ) диаграммы M, имеющих внутреннюю степень i, и имеющих общее внутреннее ребро, будем называть i-парой. При различных

i, j i-пару и j-пару будем называть разноименными. Область внутренней степени i будем называть i-областью.

Лемма 2 ([7]). Пусть M — простой диск. Если M — диаграмма над группой с условиями $C(3)$-$T(6)$ и граничные слои K_σ, K_τ не содержат полос и дэновских областей, то верны следующие утверждения:

1) для каждой из вершин A, B в M существует единственная область D_A, D_B соответственно, такая, что $A \in \partial D_A$, $B \in \partial D_B$;

2) $i(D_A) = i(D_B) = 2$;

3) слои K_σ, K_τ содержат только области внутренней степени 2 и 3, причем в каждой из поддиаграмм $K_\sigma \backslash (D_B \cup D_A)$, $K_\tau \backslash (D_B \cup D_A)$ областей первого типа на две больше, чем второго;

4) в слоях K_σ, K_τ могут встречаться только 2-пары и 3-пары и нет 2-троек, 3-троек, и т.д., причем в каждом из слоев число 2-пар на единицу больше, чем 3-пар, а разноименные пары чередуются в каждом из слоев K_σ, K_τ. То же верно и для областей: в K_σ, K_τ могут встречаться только 2- и 3-области.

Из леммы 2 получаем вывод о строении простой кольцевой диаграммы с $\bar{R}$-, R-несократимыми граничными метками: она является объединением простых дисков, граничные слои которых устроены, как в лемме 2.

Лемма 3 ([13]). Пусть M — кольцевая n-слойная диаграмма при $n > 1$ с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$ и граничными слоями K_σ, K_τ, не содержащими полос и дэновских областей (что эквивалентно несократимости граничных метов). Тогда либо в граничных слоях карты M есть только отдельные 2-области и 3-области, причем они чередуются между собой, либо в граничных слоях M есть 2- и 3-пары, которые чередуются между собой, а между ними могут встречаться отдельные 2- и 3-области. При этом граничные слои не содержат 2-троек и 3-троек, и т.д.

Следующая лемма уточняет приведенную выше классификацию кольцевых диаграмм с несократимыми граничными метками: оказывается, множество таких диаграмм содержит на один тип диаграмм меньше, если ограничиться диаграммами над группами с условиями $C(3)$-$T(6)$.

Лемма 4 ([7]). Не существует кольцевых (C-n)-слойных диаграмм, граничные метки которых $\bar{R}$-, R-несократимы.

3. Кольцевые диаграммы с периодическими метками

Для решения проблемы степенной сопряженности изучим строение кольцевых диаграмм с периодическими метками. Частично эта работа была проделана в статье [13]. Продолжим исследование после приведения соответствующих результатов.

Определение 6. Пусть M — k-слойная кольцевая диаграмма над группой $G = (X; R)$ с периодической меткой граничного цикла $\varphi(\sigma) \equiv w^n$. Будем говорить, что граничный слой K_σ является периодическим в соответствии с периодичностью граничной метки с основанием w, если он состоит из nm областей $D_1, \ldots, D_{nm}$, граничные метки которых удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned}
&\varphi(\partial D_1) \equiv \varphi(\partial D_{m+1}) \equiv \varphi(\partial D_{2m+1}) \equiv \ldots \equiv \varphi(\partial D_{(n-1)m+1});\\
&\varphi(\partial D_2) \equiv \varphi(\partial D_{m+2}) \equiv \varphi(\partial D_{2m+2}) \equiv \ldots \equiv \varphi(\partial D_{(n-1)m+2}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi(\partial D_m) \equiv \varphi(\partial D_{2m}) \equiv \varphi(\partial D_{3m}) \equiv \ldots \equiv \varphi(\partial D_{nm}),
\end{aligned}$$

а весь слой K_σ является объединением n односвязных поддиаграмм, каждая из которых является копией односвязной поддиаграммы, состоящей из областей $D_1, \ldots, D_m$.

Очевидно, что метка внутреннего граничного цикла $\varphi(\sigma_1)$ кольцевой диаграммы K_σ тоже является степенью некоторого слова w_1: $\varphi(\sigma_1) \equiv w_1^{-n}$. Здесь показатель степени равен $-n$, поскольку внутренняя граница кольца всегда имеет ориентацию, противоположную внешней.

Лемма 5 ([13]). Если диаграмма M с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$ над группой $G = (X; R)$ с условиями $C(3)$-$T(6)$ является k-слойной, граничные метки $\varphi(\sigma) \equiv w^{-2n}, \varphi(\tau) \equiv v^{2m}$ являются $\bar{R}$-, R-несократимыми и граничный слой K_σ содержит 2-пары областей, то все слои диаграммы M являются периодическими в соответствии с периодичностью граничной метки $\varphi(\sigma)$ с основанием w^2.

Такая структура слоев позволяет вырезать большую часть диаграммы M, удалив из каждого слоя $K_\sigma, K_{\sigma_1}, \ldots, K_{\sigma_{k-1}}$ по $2(n-1)d$ областей и замкнув оставшиеся $2d$ областей в кольцо, что возможно благодаря периодичности слоев. Из k таких кольцевых слоев, содержащих по $2d$ областей, склеивается кольцевая k-слойная диаграмма M_{2d}.

Как следствие, получаем следующую теорему, ограничивающую длины меток кольцевой диаграммы сопряженности $\bar{R}$-, R-несократимых степеней слов и разрешимость проблемы степенной сопряженности в рассматриваемом случае.

Теорема 4 ([13]). Предположим, что слова w^n и v^m сопряжены в группе G с условиями $C(3)$-$T(6)$. Пусть при этом диаграмма сопряженности M с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$ над группой $G = (X; R)$ с условиями $C(3)$-$T(6)$ является k-слойной при некотором целом k, а ее граничные метки, не теряя общности рассуждений, можно считать четными степенями слов w, v: $\varphi(\sigma) \equiv w^{-2n}, \varphi(\tau) \equiv v^{2m}$. Если, кроме того, эти метки являются $\bar{R}$-, R-несократимыми, и граничный слой K_σ содержит 2-пары областей, то существуют целые числа a, $b \leq C = 2(\max(|w^2|, |v^2|))^2$, для которых $w^a \sim v^b$ в группе G, и проверка сопряженности степеней слов w, v сводится к конечному числу применений алгоритма, проверяющего сопряженность в группах с условиями $C(3)$-$T(6)$ [2].

4. Простые кольцевые диаграммы с периодическими метками

В предыдущем пункте были описаны свойства кольцевой k-слойной диаграммы с периодическими метками и было сказано о разрешимости проблемы степенной сопряженности при условии использования кольцевой k-слойной диаграммы, граничные слои которой содержат 2-пары областей.

Выше дана классификация кольцевых диаграмм над $C(3)$-$T(6)$ группой с $\bar{R}$-, R-несократимыми метками. В соответствии с ней надо рассмотреть еще два типа диаграмм: k-слойные, не содержащие в граничных слоях 2-пары областей, и простые.

Здесь будет пояснено, как ограничиваются показатели степеней сопряженных слов $w^n \sim v^m$, если их диаграмма сопряженности является простой. Интересно, что для данных слов w, v диаграммы сопряженности их степеней не могут принадлежать одновременно двум из трех перечисленных типов. Таким образом, для фиксированных слов диаграмма сопряженности их степеней должна иметь вполне определенный единственный из трех перечисленных тип. Это, в частности, следует из того, что не существует (C-n)-слойных кольцевых диаграмм над группами с условиями $C(3)$-$T(6)$ (лемма 4).

Пусть M —- дисковая диаграмма над группой с условиями $C(3)$-$T(6)$. Пусть граница диаграммы M является объединением двух путей: $\partial M = \sigma \cup \tau$, причем $\sigma \cap \tau = \{A, B\}$ — пара вершин.

В статье [13] предполагалось, что граничный слой кольцевой k-слойной диаграммы сопряженности слов w^n, v^m содержит 2-пары областей. При изучении строения простых кольцевых и дисковых диаграмм это предположение излишне, поскольку граничные слои простой кольцевой диаграммы всегда содержат 2-пары областей. Это следует из строения граничных слоев дисковых поддиаграмм (лемма 2), из которых состоит простая кольцевая диаграмма.

Доказанная в [15] теорема о площади простого диска с $\bar{R}$-, R-несократимыми граничными метками (ниже приводится ее формулировка) позволяет оценить сложность задачи ограничения показателей в степенях сопряженных слов $w^n \sim v^m$. Как известно [2], площадь приведенной диаграммы над группой с условиями $C(3)$-$T(6)$ ограничена сверху квадратичной функцией длины ее границы. Оказывается, она ограничена такой же функцией и снизу, т.е. зависит от длины границы не линейно, а квадратично.

Этот результат означает, что могут существовать дисковые диаграммы большой площади и с большой длиной граничной метки. И при этом после удаления слоев K_{σ_i} или K_{τ_i} такая диаграмма остается диском, не распадаясь на более мелкие диски, связанные простыми путями. Значит, даже пользуясь периодичностью слоев в случае периодичности граничных меток не удается привести задачу о сопряженных словах $w^n \sim v^m$ с сопряженности слов $w^k \sim v^l$ при $k < n$, $l < m$.

Теорема 5 (о площади простого диска [15]). Пусть M — приведенная дисковая диаграмма над группой $G = (X; R)$ с условиями $C(3)$-$T(6)$. Пусть граница $\partial M = \sigma_0 \cup \tau_0)$ имеет R-, $\bar{R}$-несократимые метки $\varphi(\sigma_0)$, $\varphi(\tau_0)$. Тогда площадь диаграммы M_0 является квадратичной функцией длины границы ∂M_0.

Тем не менее, к указанному выше уменьшению показателей в сопряженных степенях слов удается прийти с помощью следующего свойства дисковых диаграмм с несократимыми метками. Но теперь мы будем рассматривать их как поддиаграммы простой диаграммы P сопряженности слов $w^n \sim v^m$.

Представим диаграмму P в виде объединения дисковых компонент P_i, соединенных простыми путями p_i, $i = i, \ldots, t$, для некоторого t. Граница P состоит из внешнего и внутреннего граничных циклов σ, τ, пересекающихся по простым путям p_i, $i = i, \ldots, t$. Поэтому граничный цикл σ диаграммы P имеет вид $\sigma = p_1 s_1 p_2 s_2 \ldots p_t s_t$, где $s_i = \partial P_i \cap \sigma$, $i = 1, \ldots, t$. При этом $A_i = p_i \cap s_i$, $B_i = s_i \cap p_{i+1}$ — пара вершин, общих для двух участков границы дисковой карты P_i. Пусть D_{A_i}, D_{B_i} — области внутренней степени 2 в компоненте P_i (лемма 2).

Лемма 6. Пусть P — простая кольцевая диаграмма сопряженности $\bar{R}$-, R-несократимых слов $w^{2n} \sim v^{2m}$, строение которой описано выше. Тогда $n < 3$, $m < 3$.

Таким образом, длины граничных меток простых дисков, из которых состоит простая кольцевая диаграмма, ограничены.

Доказательство. Для доказательства этого утверждения достаточно воспользоваться периодичностью граничных слоев K_{σ_1}, K_{τ_i} дисковой диаграммы P_i. Она доказывается точно так же, как в лемме 5 доказана периодичность слоев в k-слойной кольцевой диаграмме, содержащей 2-пары областей. И здесь также важно наличие таких 2-пар.

Воспользовавшись периодичностью слоя K_{σ_i}, наклеиваем его копию на граничный цикл σ со сдвигом на период так, чтобы она (копия) имела общие ребра с путями p_i и s_i (либо p_i, p_{i-1}, если длина s_i нулевая). В полученной диаграмме легко фиксируются нарушения условий $C(3)$-$T(6)$, либо свойства R-приведенности (отсутствия сократимых пар областей) поддиаграммы K_{σ_i}.

Указанных противоречий не возникает, если после сдвига на период копия слоя K_{σ_i} не содержит вершину A_i в своем граничном цикле. А это возможно только если период имеет большую длину по сравнению с длиной пути s_i. Теорема доказана.

Отметим еще одно свойство простых кольцевых диаграмм над группами с условмями $C(3)$-$T(6)$. Оно не используется при исследовании степенной сопряженности, но тоже характеризует простые кольцевые диаграммы с несократимыми метками.

Лемма 7. Пусть P — простая кольцевая диаграмма с $\bar{R}$-, R-несократимыми граничными метками $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$. Рассмотрим дисковую поддиаграмму P_i с граничным σ-слоем

$$K_\sigma^i = D_{A_i} \cup D_1^i \cup \ldots \cup D_{k_i}^i \cup D_{B_i}.$$

Удалим из P все области этого σ-слоя поддиаграммы P_i, получим новую простую кольцевую диаграмму

$$P' = P \setminus (D_{A_i} \cup D_1^i \cup \ldots \cup D_{k_i}^i \cup D_{B_i}).$$

Ее внешний граничный цикл σ' отличается от σ только подпутем с концами A_i, B_i, а внутренний граничный цикл τ не изменился. Тогда граничные метки простой кольцевой диаграммы P' являются $\bar{R}$-, R-несократимыми.

Для доказательства этого свойства достаточно убедиться в том, что попытки приклеить к диаграмме P' по границе σ' дэновскую область или полосу приводят к противоречиям либо с условиями $C(3)$ и $T(6)$, либо с предположением о несократимости граничных меток исходной диаграммы P.

Для завершения исследования степенной сопряженности, реализованной простой кольцевой диаграммой, остается ограничить длины путей p_i и их количество. Но это совсем просто. Из конечности длин слов w, v вытекает конечность числа комбинаций вида (a_i, b_i), где a_i одна из букв слова w, b_j — одна из букв слова v. Количество таких пар равно произведения длин $|w|\,|v|$. Здесь важно учитывать не только букву как элемент группового алфавита X, но и ее вхождение в соответствующее слово.

Если число простых дисков P_i в диаграмме P больше числа $(|w|\,|v|)^2$, то обязательно найдутся два диска, у которых граничные метки начинаются и заканчиваются на одни и те же буквы. Это позволяет вырезать из диаграммы сопряженности односвязную поддиаграмму и склеить оставшуюся часть в кольцо с сохранением оснований степеней в граничных метках, но с уменьшением показателей.

Кроме ограниченности числа простых дисков и длин их граничных меток, отметим и ограниченность длин простых путей p_i, соединяющих эти простые диски. Из пути большой длины можно вырезать часть с сохранение периодичности меток кольцевой диаграммы, но с уменьшением показателей степеней. Ясно, что для пути p_i с длиной метки, большей $|w|\,|v|$, найдутся две вершины, с которых по часовой стрелке читается одна и та же буква (с учетом вхождения) из слова w, и одна и та же буква из слова v. Подпуть между этими вершинами можно удалить с сохранением периодичности меток кольцевой диаграммы.

Заключение

В данной статье исследован один из трех типов кольцевых диаграмм с циклически $\bar{R}$-, R-несократимыми граничными метками. Исследована структура таких диаграмм и доказано, как решается проблема степенной сопряженности в рассматриваемом классе групп, если кольцевая диаграмма сопряженности является простой.

За рамками данной работы остался один тип кольцевых диаграмм с несократимыми метками: k-слойные, в слоях которых области с двумя и тремя внутренними ребрами строго чередуются. На данном этапе исследования не удается получить верхнюю оценку длин граничных меток в таких диаграммах. Поэтому проблема степенной сопряженности в классе групп с условиями $C(3)$-$T(6)$ остается открытой.

Список литературы

1. Магнус Д., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп: пер. с англ. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп: пер. с англ. М.: Мир, 1980. 448 с.
3. Ольшанский А.Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. М: Наука, 1989. 448 с. (Сер. Современная алгебра; вып. 16)

4. Новиков П.С. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп // Труды МИАН СССР. 1955. Т. 44. 144 с.
5. Безверхний Н.В. Разрешимость проблемы вхождения в циклическую подгруппу в группах с условием $C(6)$ // Фундаментальная и прикладная математика. 1999. Т. 5. № 1. С. 39–46.
6. Безверхний Н.В. Нормальные формы для элементов бесконечного порядка в группах с условиями $C(3)$-$T(6)$ // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2010. Вып. 1. С. 6–25.
7. Безверхний Н.В. Проблема сопряженного вхождения в циклическую подгруппу в группах с условиями $C(3)$-$T(6)$ // Дискретная математика. 2012. Т. 24, вып. 4. С. 27–46.
8. Безверхний В.Н. О нормализаторах элементов в $C(p)$-$T(q)$-группах // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвузовский сборник научных трудов. Тула: Изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого. 1994. С. 4–58.
9. Безверхний В.Н., Паршикова Е.В. Решение проблемы вхождения в циклическую подгруппу в группах с условиями $C(4)$-$T(4)$ // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвузовский сборник научных трудов. Тула: Изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого. 2001. С. 120–139.
10. Паршикова Е.В. Проблема слабой степенной сопряженности в группах с условием $C(4)$-$T(4)$ С// Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвузовский сборник научных трудов. Изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого. 2001. С. 179–185.
11. Безверхний Н.В. О кручении о и разрешимости проблемы вхождения в циклическую подгруппу в группах с условием $C(6)$ // Деп. ВИНИТИ. 1995. 2033-В95.
12. Безверхний Н.В., Чернышева О.А. Односторонние функции, основанные на проблеме дискретного логарифмирования в группах с условиями $C(3)$-$T(6)$ // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 10. С. 70–101. DOI: 10.7463/1014.0729483
13. Безверхний Н.В. Кольцевые диаграммы с периодическими метками и проблема степенной сопряженности в группах с условиями $C(3)$-$T(6)$ // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 11. С. 238–256. DOI: 10.7463/1114.0740512
14. Безверхний Н.В. Односторонние функции и композиция проблем сопряженности и дискретного логарифмирования в $C(3)$-$T(6)$-группах // Математика и математическое моделирование. 2015. № 5. С. 43–63. DOI: 10.7463/mathm.0515.0820675
15. Безверхний Н.В. Теорема о площади дисковой диаграммы над $C(3)$-$T(6)$-группой // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, № 3. С. 18–27.
16. Bogley W.A., Pride S.J. Aspherical relative presentations // Proc. of the Edinburg Math. Soc. 1992. Vol. 35, iss. 1. P. 1–39. DOI: 10.1017/S0013091500005290
17. Gersten S.M., Short H.B. Small cancellation theory and automatic groups // Inventiones mathematicae. 1990. Vol. 102, iss. 1. P. 305–334. DOI: 10.1007/BF01233430

Mathematics & Mathematical Modelling
Electronic journal of the Bauman MSTU
http://mathmjournal.ru

Mathematics and Mathematical Modelling of the Bauman MSTU, 2016, no. 4, pp. 1–16.
DOI: **10.7463/mathm.0416.0852606**
Received:

Simple Ring Diagrams and a Problem of Power Conjugacy in the Groups with $C(3)$-$T(6)$ Conditions

Bezverkhnii N. V.
*nbezv@mail.ru
[1]Bauman Moscow State Technical University, Russia

Keywords: small cancellation conditions, diagrams in groups, power conjugacy problem

In this paper we investigate the structure of the ring diagrams with periodic marks in groups with small cancellation conditions $C(3)$-$T(6)$. These diagrams are used to solve the tasks such as the problem of conjugate words, the problem of conjugate occurrence in cyclic subgroup, and the problem of power conjugacy. In groups of this class the first two problems are solved positively. The third is formulated as follows: to find out if there are integers of m, n, for which the degree of words v, w with indicators of m, n are respectively conjugated in the group $G = (X; R)$.

To solve this problem it is sufficient to obtain upper bounds for the lengths of boundary marks of a conjugacy diagram, or to limit the modules of the integers n, m. This is the subject of this paper.

Exploring the diagrams of conjugacy of words degrees, irreducible in a special sense, it becomes possible to break a set of these diagrams into three classes. Working with one of these classes, and using the periodicity of boundary marks of a diagram it becomes possible to prove the periodicity of the layers in this diagram, and later on also to limit the length of the borders. In another class is a sufficient to limit the lengths of the boundary marks since the diagrams in this class are not the n-layered, and their boundary marks intersect.

Thus, it becomes possible to limit the degree indicators of the conjugate words thereby, in fact, solving the formulated problem in the considered class of groups, provided that the diagram of conjugacy belongs to the second class mentioned. Hence, the final solution of the power conjugacy problem requires its solving for the case of diagrams of the third type.

References

1. Magnus D., Karras A., Solitar D. *Combinatorial Group Theory: Presentations of Groups in Terms of Generators and Relations*. New York, London, Sydney, Interscience Publ., 1966. (Russ. ed.: Magnus D., Karras A., Solitar D. *Kombinatornaja teorija grupp*. Moscow, Nauka Publ., 1974. 456 p.)

2. Lindon R.C., Shupp P.E. *Combinatorial Group Theory*. Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1977. (Russ. ed.: Lindon R., Shupp P. *Kombinatornaja teorija grupp*. Mir Publ., 1980. 448 p.)
3. Ol'shanskii A.Iu. *Geometry of Defining Relations in Groups*. Springer Netherlands, 2012. (Russ. ed.: Ol'shanskii A.Iu. *Geometrija opredeljajushchih sootnoshenij v gruppah*. Moscow, Nauka Publ., 1989. 448 p.)
4. Novikov P.S. On the algorithmic unsolvability of the word problem in group theory. *Trudy Mat. Inst. Steklov* [Proc. of Mathematical Institute AS USSR], 1955, vol. 44. 144 p. (in Russian)
5. Bezverkhnii N.V. On the solvability of the general word problem for a cyclic subgroup of a group with condition $C(6)$. *Fundamental'naja i prikladnaja matematika* [Fundamental and Applied Mathematics], 1999, vol. 5, no. 1. pp. 39–46. (in Russian)
6. Bezverkhnii N.V. On the normal forms of the infinite order elements in the groups with conditions $C(3)$-$T(6)$. *Izvestija TulGU. Estestvennye nauki* [Proc. of the Tula State University. Natural Science], 2010, vol. 1, pp. 6–25. (in Russian)
7. Bezverkhnii N.V. The power conjugacy search problem in a cyclic subgroup in groups with the condition $C(3)$-$T(6)$. *Discrete Mathematics and Applications*, 2012, vol. 22, no. 5-6, pp. 521–544. DOI: 10.1515/dma-2012-036 (Russ. version: *Diskretnaja matematika*, 2012, Vol. 24, iss.4, pp. 27–46).
8. Bezverkhnii V.N. On the normalizers of elements in $C(p)$-$T(q)$-groups. *Algoritmicheskie problemy teorii grupp i polugrupp: mezhvuz. sb. nauch. trudov* [Algorithmic problems of the theory of groups and semigroups: interuniversity collection of scientific papers]. Tula, Tolstoi TSPU Publ., 1994, pp. 4–58. (in Russian).
9. Bezverhnij V.N., Parshikova E.V. The solution of problems of integration in a cyclic subgroup of a group with condition $C(4)$-$T(4)$. *Algoritmicheskie problemy teorii grupp i polugrupp: mezhvuz. sb. nauch. trudov* [Algorithmic problems of the theory of groups and semigroups: interuniversity collection of scientific papers]. Tula, Tolstoi TSPU Publ., 2001, pp. 120–139. (in Russian).
10. Parshikova E.V. The problem of weak power conjugacy in groups with condition $C(4)$-$T(4)$. *Algoritmicheskie problemy teorii grupp i polugrupp: mezhvuz. sb. nauch. trudov* [Algorithmic problems of the theory of groups and semigroups: interuniversity collection of scientific papers]. Tula, Tolstoi TSPU Publ., 2001, pp. 179–185. (in Russian).
11. Bezverhnii N.V. *O kruchenii o i razreshimosti problemy vhozhdenija v ciklicheskuju podgruppu v gruppah s usloviem* $C(6)$ [Torsion and solvability of the general word problem for a cyclic subgroup of the group with condition $C(6)$]. Moscow, 1995. Dep. VINITI, no. 2033-V95. (in Russian).
12. Bezverhnii N.V., Chernosheva O.A. One-way functions based on the discrete logarithm problem in the groups meeting conditions $C(3)$-$T(6)$. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E.

Baumana [Science and Education of the Bauman MSTU], 2014, no. 10. pp. 70–101. DOI: 10.7463/1014.0729483 (in Russian).

13. Bezverkhnii N.V. Ring Diagrams with Periodic Labels and Power Conjugacy Problem in Groups with Small Cancellation Conditions $C(3)$-$T(6)$. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2014, no. 11, pp. 238–256. DOI: 10.7463/1114.0740512 (in Russian)
14. Bezverkhnii N.V. One-Way Functions and Composition of Conjugacy and Discrete Logarithm Problems in the Small Cancellation Groups. *Matematika i matematicheskoe modelirovanie* [Mathematics and mathematical modeling], 2015, no. 5, pp 43–63. DOI: 10.7463/mathm.0515.0820675 (in Russian)
15. Bezverkhniy N.V. The area theorem for the disc diagram over $C(3)$-$T(6)$-group. *Chebyshevskii sbornik* [Chebyshev collection], vol. 17, no 3, p. 18–27. (in Russian)
16. Bogley W.A., Pride S.J. Aspherical relative presentations. *Proc. of the Edinburgh Math. Soc.*, 1992, vol. 35, iss. 1, pp. 1–39. DOI: 10.1017/S0013091500005290
17. Gersten S.M., Short H.B. Small cancellation theory and automatic groups. *Inventiones mathematicae*, 1990, vol. 102, iss. 1, pp. 305–334. DOI: 10.1007/BF01233430