Математика и математическое моделирование. 2019. № 3. С. 36–44.
DOI: 10.24108/mathm.0319.0000191

Математика и Математическое моделирование
Сетевое научное издание
http://mathmelpub.ru ISSN 2412-5911

УДК 511.361

О приближении значений некоторых гипергеометрических функций специального вида с иррациональными параметрами

Иванков П. Л.[1,*]

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

[*]ivankovpl@mail.ru

В работе изучается арифметическая природа значений обобщенных гипергеометрических функций и их производных. Используется метод, основанный на эффективном построении линейной приближающей формы. В случае, когда числитель рациональной функции, участвующей в формировании коэффициентов рассматриваемой гипергеометрической функции, отличен от тождественной единицы, в методе эффективной линейной приближающей формы возникают определенные трудности. В работе для преодоления этих трудностей значения соответствующей гипергеометрической функции и ее производных берутся лишь в малых точках, а на параметры функции накладываются дополнительные ограничения.

Ключевые слова: линейная независимость; обобщенные гипергеометрические функции; малые точки; иррациональные параметры

Представлена в редакцию: 02.10.2019.

1. Введение

Рассмотрим обобщенную гипергеометрическую функцию вида

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)}, \tag{1}$$

где $a(x)$ и $b(x)$ — некоторые полиномы, старшие коэффициенты которых равны единице. В рассматриваемой ниже теореме эти полиномы выбираются специальным образом: $a(x) = x + \alpha$ и $b(x) = x(x+\beta_1)(x+\beta_2)(x+2\alpha+1)$. Значения функции вида (1) изучались в ряде работ, в частности в [6, 7]). Однако нетрудно убедиться в том, что доказанная в настоящей статье теорема 1 не вытекает непосредственно из полученных там результатов.

2. Результат

Пусть $\mathbb{I}$ — мнимое квадратичное поле и функции $F_j(z)$, $j = \overline{1,\,4}$, определены равенством

$$F_j(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu \chi_j(\nu) \prod_{x=1}^{\nu} \frac{\alpha + x}{x(\beta_1 + x)(\beta_2 + x)(2\alpha + 1 + x)},$$

где $\alpha,\ \beta_1,\ \beta_2 \in \mathbb{I} \setminus \mathbb{Q}$; $\alpha - \beta_1,\ \alpha - \beta_2 \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$; $\chi_1(\nu) = 1$; $\chi_2(\nu) = \nu$; $\chi_3(\nu) = \nu(\nu + \beta_1)$; $\chi_4(\nu) = \nu(\nu + \beta_1)(\nu + \beta_2)$.

В дальнейшем нам понадобится также полином

$$\chi_5(\nu) = \nu(\nu + \beta_1)(\nu + \beta_2)(\nu + 2\alpha + 1).$$

Теорема 1. Пусть ω и q — ненулевые целые числа из поля $\mathbb{I}$. Тогда при $|q| \geqslant q_0$ числа $F_j\Big(\dfrac{\omega}{q}\Big)$, $j = \overline{1,\,4}$, линейно независимы над этим полем; положительное число q_0 зависит от α, β_1, β_2, ω и от поля $\mathbb{I}$.

3. Леммы

Пусть n — натуральное число. Рассмотрим полиномы с неопределенными коэффициентами

$$P_{lj}(z) = \sum_{s=0}^{n} p_{ljs} z^s, \quad l,\ j = \overline{1,\,4}, \tag{2}$$

и линейные функциональные формы

$$R_l(z) = \sum_{j=1}^{4} P_{lj}(z)\, F_j(z), \quad l = \overline{1,\,4}. \tag{3}$$

Для коэффициента $c_{l\nu}$ при z^ν в разложении по степеням z функции $R_l(z)$ имеем

$$\begin{aligned} c_{l\nu} = &\sum_{s=0}^{\min(n,\nu)} \sum_{j=1}^{4} p_{ljs} \chi_j(\nu - s) \prod_{x=1}^{\nu-s} \frac{\alpha + x}{x(\beta_1 + x)(\beta_2 + x)(2\alpha + 1 + x)} = \\ &= B_{\nu n} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{x(\beta_1 + x)(\beta_2 + x)(2\alpha + 1 + x)} \sum_{s=0}^{n} \sum_{j=1}^{4} p_{ljs} \chi_j(\nu - s) \times \\ &\times \prod_{x=0}^{s-1} (\nu - x)(\nu + \beta_1 - x)(\nu + \beta_2 - x)(\nu + 2\alpha + 1 - x) \prod_{x=1}^{n-s} (\nu + \alpha - n + x), \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$B_{\nu n} = \begin{cases} \displaystyle\prod_{x=0}^{n-\nu-1} \frac{1}{\alpha - x}, & 0 \leqslant \nu < n; \\ \displaystyle\prod_{x=1}^{\nu-n} (\alpha + x), & \nu \geqslant n. \end{cases}$$

Верхняя граница индекса суммирования $\min(n, \nu)$ в (4) заменена на n ввиду наличия под знаком произведения множителя $\nu - x$.

Выберем коэффициенты полиномов (3) так, чтобы при $l = \overline{1,4}$ тождественно по ν выполнялось равенство

$$\sum_{s=0}^{n}\sum_{j=1}^{4} p_{ljs}\chi_j(\nu-s)\prod_{x=0}^{s-1}(\nu-x)(\nu+\beta_1+x)(\nu+\beta_2+x)(\nu+2\alpha+1-x)\times$$
$$\times\prod_{x=1}^{n-s}(\nu+\alpha-n+x)=Q_l(\nu), \quad (5)$$

где

$$Q_l(\nu)=\prod_{x=0}^{4n+l-2}(\nu-x) \quad (6)$$

В работах [8, 6] показано, что для этого следует положить

$$p_{ljs}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f_{ljs}(\zeta)\,d\zeta, \quad (7)$$

где

$$f_{ljs}(\zeta)=\frac{K_{js}(\zeta)\,Q_l(\zeta)}{\chi_{j+1}(\zeta-s)\prod\limits_{x=0}^{s-1}(\zeta-x)(\zeta+\beta_1-x)(\zeta+\beta_2-x)(\zeta+2\alpha+1-x)}\times$$
$$\times\frac{1}{\prod\limits_{x=1}^{n-s}(\zeta+\alpha-n+x)}. \quad (8)$$

В последнем выражении

$$K_{js}(\zeta)=\begin{cases}1, & j=1,\ s=0\ \text{или}\ j=2,3,4,\ s=0,1,\ldots,n,\\ \dfrac{\alpha+1}{\zeta+\alpha-s+1}, & j=1,\ s=1,2,\ldots,n,\end{cases}$$

а простой замкнутый положительно ориентированный кусочно гладкий контур Γ из правой части (7) охватывает все нули полинома

$$\varphi_1(\zeta)=\prod_{x=0}^{n}(\zeta-x)(\zeta+\beta_1-x)(\zeta+\beta_2-x)(\zeta+2\alpha+1-x),$$

и при этом все нули полинома

$$\varphi_2(\zeta)=\prod_{x=1}^{n}(\zeta+\alpha-n+x)$$

лежат в его внешности. Такой контур Γ существует в силу условий $\alpha,\ \alpha-\beta_1,\ \alpha-\beta_2\notin\mathbb{Z}$.

Лемма 1. При указанном выборе коэффициентов многочленов (2) справедливы равенства

$$\deg P_{11}(z)=\deg P_{22}(z)=\deg P_{33}=\deg P_{44}=n,\ \deg P_{ij}(z)<n,\ \text{если}\ i<j.$$

Доказательство. Имеем

$$p_{11n}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f_{11n}(\zeta)\,d\zeta=-\operatorname*{Res}_{\zeta=\infty} f_{11n}(\zeta)-\operatorname*{Res}_{\zeta=-\alpha+n-1} f_{11n}(\zeta). \quad (9)$$

Вычет относительно бесконечно удаленной точки равен нулю, поскольку степень числителя рациональной функции $f_{11n}(\zeta)$ на две единицы меньше степени ее знаменателя. Непосредственным вычислением можно проверить, что при выполнении условий теоремы 1 вычет относительно точки $\zeta = -\alpha + n - 1$ из правой части (9) отличен от нуля. Таким образом, равенство $\deg P_{11}(z) = n$ справедливо. Аналогично можно проверить и другие утверждения леммы. Лемма доказана.

Общим знаменателем некоторого множества чисел $X \subset \mathbb{I}$ будем называть такое отличное от нуля натуральное число g, что $gx \in \mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$ для любого $x \in X$. Через $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ будем обозначать положительные постоянные, зависящие от α, β и от поля $\mathbb{I}$.

Лемма 2. Общий наименьший знаменатель коэффициентов (8) полиномов (2) оценивается сверху величиной $e^{\gamma_1 n} n!$

Доказательство. Пусть $j = 2$, $s = 0, 1, \ldots, n$. Тогда в соответствии с (8) имеем

$$p_{l2s} = -\operatorname*{Res}_{\zeta=\infty} f_{l2s}(\zeta) - \sum_{\mu=1}^{n-s} \operatorname*{Res}_{\zeta=-\alpha+n-\mu} f_{l2s}(\zeta). \tag{10}$$

Если написать значение вычета подынтегральной функции относительно бесконечно удаленной точки, то станет ясно, что модуль общего наименьшего знаменателя таких вычетов (при $l = 1, 2, 3, 4$ и $s = 0, 1, \ldots, n$) оценивается сверху величиной $e^{\gamma_2 n}$. Далее, при $1 \leqslant \mu \leqslant n-s$ имеем для соответствующих вычетов

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{\zeta=-\alpha+n-\mu} &= \frac{\pm \prod\limits_{x=s+1}^{4n+l-2} (\alpha - n + \mu + x)}{\prod\limits_{x=0}^{s-1} (\alpha + 1 + n - \mu - x)} \times \\ &\times \frac{\beta_2 - \alpha + n - \mu - s}{\prod\limits_{x=0}^{s} (\beta_1 - \alpha + n - \mu - x)(\beta_2 - \alpha + n - \mu - x)} \cdot \frac{1}{(\mu-1)!(n-s-\mu)!}. \end{aligned} \tag{11}$$

Мы видим, что произведение $\prod\limits_{x=0}^{s-1} (\alpha + n - \mu - x)$ в знаменателе полностью сокращается, а для того, что останется, оценка общего наименьшего знаменателя (при $s = 0, 1, \ldots, n$, $\mu = 1, 2, \ldots, n-s$) хорошо известна: такая оценка получена в нескольких работах [9, 10, 11]. Для доказательства теоремы 1 подходит уточненная оценка вида $(n!)e^{\gamma_3 n}$, полученная в последней из упомянутых работ. Мы видим, что при $j = 2$ лемма справедлива; случай $j = 1$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

С помощью (6)—(8) и (2), можно получить такие оценки:

$$|p_{ljs}| \leqslant \left(\frac{n!}{s!}\right)^3 e^{\gamma_4 n}, \quad |P_{lj}(\xi)| \leqslant (n!)^3 e^{\gamma_4 n}, \quad l, j = \overline{1, 4}, \quad s = \overline{0, n}. \tag{12}$$

Из (4), (5) и (6) следует равенство

$$c_{l\nu} = B_{\nu n} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{(\beta_1 + x)(\beta_2 + x)(2\alpha + 1 + x)} \prod_{x=0}^{2n+l-2} (\nu - x),$$

которое показывает, что

$$c_{l\nu} = 0, \quad l = \overline{1,\, 4}, \quad \nu = \overline{0,\, 2n{+}l{-}2}. \tag{13}$$

С учетом оценок (12) получаем отсюда такое неравенство

$$|R_l(\xi)| \leqslant (n!)^{-9} e^{\gamma_5 n}. \tag{14}$$

Здесь константа γ_5 может зависеть также и от ω.

Теперь все готово для доказательства теоремы. Составим определитель

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} P_{11}(z) & \dots & P_{14}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{41}(z) & \dots & P_{44}(z) \end{vmatrix}.$$

Порядок нуля этого определителя при $z = 0$ равен $2n$; это вытекает из (13): достаточно записать $\Delta(z)$ в виде

$$\Delta(z) = \frac{1}{F_1(z)} \begin{vmatrix} R_1(z) & P_{12}(z) & P_{13}(z) & P_{14} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_4(z) & P_{42}(z) & P_{43}(z) & P_{44}(z) \end{vmatrix}. \tag{15}$$

С другой стороны, из леммы 1 вытекает, что степень $\Delta(z)$ также равна $4n$. Поэтому $\Delta(z) = Cz^{4n}$, $C \neq 0$. Рассмотрим числовой определитель $\Delta(\omega/q)$. Из вышесказанного ясно, что $\Delta(\omega/q) \neq 0$, и одну из строк этого определителя можно заменить на строку $(h_1, \dots, h_4)$ так, чтобы получившийся при этом определитель (обозначим его через δ) был отличен от нуля. Из леммы 2 следует оценка снизу модуля δ:

$$|\delta| > (n!)^{-1} e^{-\gamma_5 n} q^{-3n}. \tag{16}$$

Оценку сверху для $|\delta|$ можно получить с помощью (12) и (14):

$$|\delta| < |l| n!\, e^{\gamma_3 n} + H(n!)^{-1} e^{\gamma_4 n}\, q^{-4n}, \tag{17}$$

где $l = h_1 F_1(\omega/q) + \ldots + h_4 F_2(\omega/q)$.

Для получения последней оценки следует записать δ в виде, аналогичном (15). Если, например, мы заменили первую строку определителя $\Delta(\omega/q)$ на строку $(h_1, \dots, h_4)$, а из чисел $F_1(\omega/q), \dots, F_4(\omega/q)$ первое оказалось отличным от нуля, то мы имеем равенство

$$\delta = \frac{1}{F_1(\omega/q)} \begin{vmatrix} l & h_2 & \cdots & h_4 \\ R_2(\omega/q) & P_{22}(\omega/q) & \dots & P_{24}(\omega/q) \\ R_3(\omega/q) & P_{32}(\omega/q) & \dots & P_{34}(\omega/q) \\ R_4(\omega/q) & P_{42}(\omega/q) & \dots & P_{44}(\omega/q) \end{vmatrix},$$

из которого легко следует (17).

Заметим, что одновременное выполнение равенств $F_1(\omega/q) = \ldots = F_4(\omega/q) = 0$ противоречит теореме о единственности решения задачи Коши из теории обыкновенных дифференциальных уравнений (функции $F_1(z), \ldots, F_4(z)$ удовлетворяют линейному дифференциальному уравнению [3, гл. 5, § 1]).

Если предположить, что $l = 0$, то из (17) получаем такое неравенство:

$$|\delta| < H(n!)^{-1}e^{\gamma_4 n}\, q^{-4n}, \tag{18}$$

Комбинируя (18) с полученным ранее неравенством (16), получаем противоречие для всех достаточно больших значений $|q|$; это означает справедливость теоремы 1.

Заключение

Полученные в настоящей работе результаты можно обобщать в различных направлениях. Можно заменить $x + 2\alpha + 1$ в знаменателе из правой части (1) специально подобранным полиномом так, чтобы произошло сокращение в числителе и знаменателе, как это случилось в последнем выражении из (11). Можно также дополнить доказанную теорему количественным результатом в виде оценки снизу модуля соответствующей линейной формы.

Список литературы

1. Siegel C.L. Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen // Abh. der Preussischen Akad. der Wiss. Phys.-Math. Kl. 1929–1930. Nr. 1. S. 1–70.
2. Siegel C.L. Transcendental numbers. Princeton: Princeton Univ. Press, 1949. 102 p.
3. Шидловский А.Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987. 447 с.
4. Галочкин А.И. О некотором аналоге метода Зигеля // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. 1986. № 2. С. 30–34.
5. Фельдман Н.И. Седьмая проблема Гильберта. М.: Изд-во МГУ, 1982. 312 с.
6. Иванков П.Л. Оценки снизу линейных форм от значений функции Куммера с иррациональным параметром // Математические заметки. 1991. Т. 49, вып. 2. С. 55–63.
7. Иванков П.Л. О линейной независимости значений некоторых функций // Фундаментальная и прикладная математика. 1995. Т. 1, вып. 1. С. 191–206.
8. Иванков П.Л. Об арифметических свойствах значений гипергеометрических функций // Математический сборник. 1991. Т. 182, № 2. С. 283–302.
9. Галочкин А.И. Об арифметических свойствах значений некоторых целых гипергеометрических функций // Сибирский математический журнал. 1976. Т. 17, № 6. С. 1220–35.
10. Галочкин А.И. О некоторых арифметических свойствах коэффициентов функции Куммера // Фундаментальная и прикладная математика. 2005. Т. 11, № 6. С. 27–32.

11. Иванков П.Л. О значениях гипергеометрических функций с различными иррациональными параметрами // Фундаментальная и прикладная математика. 2005. Т. 11, № 6. С. 65–72.
12. Галочкин А.И. Оценки снизу линейных форм от значений некоторых гипергеометрических функций // Математические заметки. 1970. Т. 8, № 1. С. 19–28.
13. Галочкин А.И. О диофантовых приближениях значений некоторых целых функций с алгебраическими коэффициентами. I // Вестник МГУ. Сер. 1: Математика. Механика. 1978. № 6. С. 25–32.
14. Галочкин А.И. О диофантовых приближениях значений некоторых целых функций с алгебраическими коэффициентами. II // Вестник МГУ. Сер. 1: Математика. Механика. 1979. № 1. С. 26–30.
15. Иванков П.Л. О вычислении постоянных, входящих в оценки линейных форм // Изв. высш. учеб. заведений. Математика. 2000. № 1(452). С. 31–36.

Mathematics and Mathematical Modeling, 2019, no. 3, pp. 36–44.
DOI: **10.24108/mathm.0319.0000191**

Mathematics & Mathematical Modelling
Electronic journal
http://mathmelpub.ru ISSN 2412-5911

On Values Approximation of Some Special Type Hypergeometric Functions with Irrational Parameters

P. L. Ivankov[1,*]

[1]Bauman Moscow State Technical University, Russia
[*]ivankovpl@mail.ru

Keywords: linear independence, generalized hypergeometric functions, small points, irrational parameters

Received: 02.10.2019.

In this paper we investigate arithmetic nature of the values of generalized hypergeometric functions and their derivatives. To solve the problem one often makes use of Siegel's method. The first step in corresponding reasoning is, using the pigeonhole principle, to construct a functional linear approximating form, which has high order of zero at the origin of the coordinates.

A hypergeometric function is defined as a sum of a power series whose coefficients are the products of the values of some rational function. Taken with the opposite sign, the zeroes of a numerator and a denominator of this rational function are called parameters of the corresponding generalized hypergeometric function. If the parameters are irrational it is impossible, as a rule, to employ Siegel's method. In this case one applies the method based on the effective construction of the linear approximating form.

Additional difficulties arise in case the rational function numerator involved in the formation of the coefficients of the hypergeometric function under consideration is different from the identical unit. In this situation even the availability of the effective construction of approximating form does not enable achieving an arithmetic result yet. In this paper we consider just such a case. To overcome difficulties arisen here we consider the values of the corresponding hypergeometric function and its derivatives at small points only and impose additional restrictions on parameters of the function.

References

1. Siegel C.L. Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen. *Abh. der Preussischen Akad. der Wiss. Phys.-Matem. Kl.*, 1929–1930, nr. 1, s. 1–70.

2. Siegel C.L. Transcendental numbers. Princeton: Princeton Univ. Press, 1949. 102 p.
3. Shidlovskij A.B. *Transtsendentnye chisla* [Transcendental numbers]. Moscow: Nauka Publ., 1987. 447 p. (in Russian).
4. Galochkin A.I. Some analogs of the Siegel method. *Vestnik Moskovskogo Univ. Ser. 1: Matematika. Mekhanika* [Moscow Univ. Mathematics Bull.], 1986, vol. 41, no. 2, pp. 30–34 (in Russian).
5. Fel'dman N.I. *Sed'maia problema Hilberta* [Hilbert's seventh problem]. Moscow: MSU Publ., 1982. 312 p. (in Russian).
6. Ivankov P.L. Lower bounds for linear forms in the values of Kummer function with an irrational parameter. *Mathematical Notes*, 1991, vol. 49, no. 1-2, pp. 152–157. DOI: 10.1007/BF01137545
7. Ivankov P.L. On linear independence of the values of some functions. *Fundamentalnaia i prikladnaia matematika* [Fundamental and Applied Mathematics], 1995, vol. 1, no. 1, pp. 191–206 (in Russian).
8. Ivankov P.L. On arithmetic properties of the values of hypergeometric functions. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1992, vol. 72, no. 1, pp. 267–286. DOI: 10.1070/SM1992v072n01ABEH001413
9. Galochkin A.I. Arithmetic properties of the values of certain entire hypergeometric functions. *Siberian Mathematical J.*, 1976, vol. 17, no. 6, pp. 894–906. DOI: 10.1007/BF00968016
10. Galochkin A.I. Certain arithmetic properties of coefficients of Kummer's function. *J. of Mathematical Sciences*, 2007, vol. 146, no. 2, pp. 5644–5648. DOI: 10.1007/S10958-007-0379-8
11. Ivankov P.L. On values of hypergeometric functions with different irrational parameters. *J. of Mathematical Sciences*, 2007, vol. 146, no. 2, pp. 5674–5679. DOI: 10.1007/s10958-007-0383-2
12. Galochkin A.I. Estimates from below of linear forms in the values of certain hypergeometric functions. *Mathematical Notes*, 1970, vol. 8, pp. 478–484.
13. Galochkin A.I. On diophantine approximations of the values of certain entire functions with algebraic coefficients. I. *Vestnik Moskovskogo Univ. Ser. 1: Matematika. Mekhanika* [Moscow Univ. Mathematics Bull.], 1978, vol. 33, no. 6, pp. 25–32 (in Russian).
14. Galochkin A.I. On diophantine approximations of the values of certain entire functions with algebraic coefficients. II. *Vestnik Moskovskogo Univ. Ser. 1: Matematika. Mekhanika* [Moscow Univ. Mathematics Bull.], 1979, vol. 34, no. 1, pp. 26–30 (in Russian).
15. Ivankov P.L. On the calculation of the constants involved in the estimation of linear forms. *Russian Mathematics*, 2000, vol. 44, no. 1, pp. 29–35.