Математика и Математическое моделирование
Сетевое издание
МГТУ им. Н.Э. Баумана
http://mathmjournal.ru

Ссылка на статью:
// Математика и математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 3. С. 27–38.
DOI: 10.7463/mathm.0315.0789645
Представлена в редакцию: 06.07.2015

УДК 517.935.4

О стабилизации аффинных систем второго порядка при наличии возмущений

Кавинов А. В.[1,*]

[*]kavinov@newmail.ru

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

В статье исследуется вопрос о возможности глобальной стабилизации при наличии возмущений двумерных аффинных систем со скалярным управлением и скалярным возмущением, для которых соответствующие системы без возмущений эквивалентны регулярным системам канонического вида. Получены легко проверяемые условия того, что построенная на основании регулярного канонического вида функция Ляпунова для системы с управлением будет функцией Ляпунова для системы с возмущениями. Приведены примеры применения полученных условий к некоторым классам аффинных систем и результаты численного моделирования процесса стабилизации при наличии различных возмущений двумерной аффинной системы с возмущениями.

Ключевые слова: стабилизация; аффинная система; функция Ляпунова; система с возмущением

Введение

Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = A(x) + C(x)w, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad w \in \mathbb{R}^k, \tag{1}$$

где $A(x)$ и $C(x)$ — гладкие функции; $A(0) = 0$; w — возмущение. Соответствующую систему

$$\dot{x}(t) = A(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

называют *невозмущенной системой*, а систему (1) — *возмущенной системой*.

Обозначим $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}\colon\ x \geqslant 0\}$. Скажем, что непрерывная функция $\gamma\colon\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ принадлежит классу $\mathcal{K}_\infty$, если $\gamma(0) = 0$; γ — строго возрастающая на $\mathbb{R}_+$; $\gamma(r) \to \infty$ при $r \to \infty$. Непрерывную функцию $\beta\colon\ \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ отнесем к классу $\mathcal{KL}$, если $\beta(\cdot, s) \in \mathcal{K}_\infty$ для каждого значения $s \in \mathbb{R}_+$, а для каждого $r \in \mathbb{R}_+$ функция $\beta(r, \cdot)$ убывающая и $\beta(r, s) \to 0$ при $s \to \infty$.

Систему (1) называют *глобально устойчивой при наличии возмущений* (или *устойчивой от входа к состоянию*) [1, 3, 4, 5, 6, 7], если существуют такие функции $\beta \in \mathcal{KL}$ и $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$, что для любого начального состояния $x(t_0)$ и любого кусочно непрерывного ограниченного возмущения $w = w(t)$, решение $x(t)$ системы определено при всех $t \geqslant t_0$ и удовлетворяет условию

$$\|x(t)\| \leqslant \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) + \gamma(\sup_{\tau \in [t_0, t]} \|w(\tau)\|), \quad t \geqslant t_0. \tag{3}$$

Известна следующая теорема [1, 4, 5, 6].

Теорема 1 (о глобальной устойчивости при наличии возмущений**).** Пусть для системы (1) существует непрерывно дифференцируемая функция $V(x)$, удовлетворяющая условию

$$\alpha_1(\|x\|) \leqslant V(x) \leqslant \alpha_2(\|x\|), \tag{4}$$

где $\alpha_{1,2} \in \mathcal{K}_\infty$, а также условию

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} A(x) + \frac{\partial V(x)}{\partial x} C(x) w \leqslant -P(x), \quad \|x\| \geqslant \rho(\|w\|), \tag{5}$$

где $P(x)$ — положительно определенная функция; $\rho \in \mathcal{K}_\infty$. Тогда система (1) глобально устойчива при наличии возмущений, а функцию γ в (3) можно выбрать равной $\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2 \circ \rho$.

Функцию V, удовлетворяющую условию теоремы, называют *функцией Ляпунова* системы с возмущением.

Аффинной *системой с возмущениями* называют систему вида

$$\dot{x}(t) = A(x) + B(x)u + C(x)w, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad w \in \mathbb{R}^k, \quad u \in \mathbb{R}^m, \tag{6}$$

где $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ — гладкие функции; w — возмущение; u — управление. Говорят, что система (6) *глобально стабилизируема при наличии возмущений*, если существует такое непрерывное управление $u = u_*(x)$, $u(0) = 0$, что замкнутая им система (6) глобально устойчива при наличии возмущений.

Гладкая положительно определенная радиально неограниченная функция $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ называется *функцией Ляпунова* аффинной системы (6) с возмущением, если существует такая функция $\rho \in \mathcal{K}_\infty$, что для любых $x \neq 0$ и $w \in \mathbb{R}^k$, связанных условием $\|x\| \geqslant \rho(\|w\|)$, выполняется неравенство

$$\inf_{u \in \mathbb{R}^m} \dot{V}|_{(6)} = \inf_{u \in \mathbb{R}^m} (\mathbf{A}V + \mathbf{B}Vu + \mathbf{C}Vw) < 0.$$

Известны следующие результаты [1].

Теорема 2 (критерий функции Ляпунова для системы с возмущениями**).** Для того чтобы гладкая положительно определенная радиально неограниченная функция $V(x)$ была функцией Ляпунова управляемой системы (6) с возмущением, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая функция $\rho \in \mathcal{K}_\infty$, что для любого $x \neq 0$

$$\mathbf{B}V = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \mathbf{A}V + \|\mathbf{C}V\| \rho^{-1}(\|x\|) < 0. \tag{7}$$

Теорема 3. Система (6) глобально стабилизируема при наличии возмущений тогда и только тогда, когда для нее существует функция Ляпунова управляемой системы с возмущением, удовлетворяющая свойству малых управлений. При этом стабилизирующее управление может быть вычислено по формуле

$$u_s(x) = \begin{cases} -\dfrac{\omega(x) + \sqrt{(\omega(x))^2 + \|\mathbf{B}V(x)\|^4}}{\|\mathbf{B}V(x)\|^2} (\mathbf{B}V(x))^T, & \mathbf{B}V(x) \neq 0; \\ 0, & \mathbf{B}V(x) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

где

$$\omega(x) = \mathbf{A}V(x) + \|\mathbf{C}V\|\, \rho^{-1}(\|x\|).$$

1. Двумерные аффинные системы

Теорема 3 позволяет найти стабилизирующее управление для аффинной системы с возмущениями в том случае, если известна соответствующая функция Ляпунова. Если же таковая неизвестна, то вопрос о стабилизирующем управлении остается открытым. Существует ли вообще управление, стабилизирующее аффинную систему с возмущениями, и как его найти? Ответ на этот вопрос в некоторых случаях может быть дан с использованием преобразования аффинных систем к эквивалентному каноническому виду.

Рассмотрим систему вида

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u + C(x)w, \quad x \in \mathbb{R}^2, \; u \in \mathbb{R}, \; w \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

где $A(x) = (a_1(x),\, a_2(x))^T$, $A(0) = 0$, $B(x) = (b_1(x),\, b_2(x))^T$, $C(x) = (c_1(x),\, c_2(x))^T$, $a_i(x),], b_i(x),\, c_i(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $i = 1,\, 2$.

Покажем сначала, как найти функцию Ляпунова для невозмущенной системы

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u. \tag{10}$$

Система (10) эквивалентна на $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ системе канонического вида

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2; \\ \dot{z}_2 = f(z) + g(z)u \end{cases} \tag{11}$$

тогда и только тогда [8, 9], когда на Ω определена гладкая функция $\varphi(x)$, обладающая следующими свойствами:

1) $\mathbf{B}\varphi = b_1(x)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} + b_2(x)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} = 0$, $x \in \mathbb{R}^2$;

2) отображение $\Phi(x) = (\varphi(x),\; \mathbf{A}\varphi(x))^T$ является диффеоморфизмом из Ω в $\Phi(\Omega)$.

При этом $z = \Phi(x)$, $f(z) = \mathbf{A}^2\varphi(x)\Big|_{x=\Phi^{-1}(z)}$, $g(z) = \mathbf{B}\mathbf{A}\varphi(x)\Big|_{x=\Phi^{-1}(z)}$.

Далее для простоты будем считать, что $\Omega = \Phi(\Omega) = \mathbb{R}^2$. Будем также считать, что на $\mathbb{R}^2$ система (11) регулярна, т.е. $g(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{R}^2$.

2. Предполагаемая функция Ляпунова для системы с возмущением

Известен метод построения функций Ляпунова для аффинных систем с возмущениями, эквивалентных регулярным системам канонического вида [10]. Для системы (11) стабилизирующим (в обычном смысле) нулевое решение управлением будет [8]

$$\tilde{u}(z) = \frac{1}{g(z)}(-f(z) - k_0 z_1 - k_1 z_2), \quad k_0,\, k_1 > 0.$$

При этом замкнутая система будет линейной с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2; \\ \dot{z}_2 = -k_0 z_1 - k_1 z_2, \end{cases} \tag{12}$$

поэтому для нее будет существовать функция Ляпунова в виде квадратичной формы:

$$\tilde{V}(z) = \frac{1}{2}qz_1^2 + rz_1z_2 + \frac{1}{2}sz_2^2 = z^T P z,$$

для коэффициентов которой справедливы неравенства $q > 0$, $s > 0$, $r > 0$, $qs - r^2 > 0$. Тогда нулевое решение системы (10) будет стабилизироваться управлением

$$\tilde{u}(x) = \frac{1}{g(\Phi(x))}\Big(-f(\Phi(x)) - k_0\varphi(x) - k_1\mathbf{A}\varphi(x)\Big), \quad k_0,\, k_1 > 0,$$

а функция

$$V(x) = \frac{1}{2}q\varphi^2(x) + r\varphi(x)\mathbf{A}\varphi(x) + \frac{1}{2}s(\mathbf{A}\varphi(x))^2 \tag{13}$$

будет функцией Ляпунова системы с управлением (10), замкнутой управлением $\tilde{u}(x)$. Значит, $V(x)$ является функцией Ляпунова для невозмущенной системы с управлением (10), причем для нее выполнено свойство малых управлений. В свою очередь, это означает, что если $\mathbf{B}V(x) = 0$ при $x \neq 0$, то $\mathbf{A}V(x) < 0$. Это дает некоторую надежду на нахождение функции $\rho^{-1}(\|x\|)$, для которой выполняется условие критерия функции Ляпунова для системы с возмущением (7). В частности, для случая системы

$$\dot{x} = A(x) + B(x)(u + w) \tag{14}$$

условие (7) будет выполняться для любой допустимой $\rho^{-1}(\|x\|)$ [10].

3. Постановка задачи

Далее рассмотрим задачу поиска функций Ляпунова для двумерных аффинных систем со скалярным управлением и скалярным возмущением, эквивалентных на $\mathbb{R}^2$ регулярным системам канонического вида.

В этой статье исследуется вопрос о подмножестве систем (9), для которых функция Ляпунова $V(x)$ может быть получена в виде (13). Для таких систем глобальная стабилизация при наличии возмущений может быть осуществлена с помощью управления (8), построенного для $V(x)$. Будем далее для краткости называть такие системы канонически стабилизируемыми. Как уже было сказано, системы вида (14) являются канонически стабилизируемыми; оказывается, ими не исчерпывается подмножество канонически стабилизируемых систем. Ниже критерий (7) будет преобразован к виду, удобному для проверки канонической стабилизируемости двумерных аффинных систем, приводящихся к регулярному каноническому виду. С помощью полученного преобразованного условия будут найдены некоторые классы двумерных канонически стабилизируемых систем.

4. Условия канонической стабилизируемости двумерных аффинных систем с возмущениями

Будем рассматривать систему (9), эквивалентную на $\mathbb{R}^2$ регулярной системе канонического вида (11). Пусть соответствующий диффеоморфизм $z = \Phi(x) = (\varphi(x), \mathbf{A}\varphi(x))^T$ удовлетворяет условию

$$\psi_1(\|x\|) \leqslant \|z\| \leqslant \psi_2(\|x\|), \quad \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{K}_\infty \tag{15}$$

или, что то же самое,

$$\psi_2^{-1}(\|z\|) \leqslant \|x\| \leqslant \psi_1^{-1}(\|z\|). \tag{16}$$

Выполнение этих условий гарантирует, что

$$\alpha_1(\|x\|) \leqslant V(x) \leqslant \alpha_2(\|x\|), \tag{17}$$

где $\alpha_1(\|x\|) = \lambda_{\min}\psi_1(\|x\|)^2$, $\alpha_2(\|x\|) = \lambda_{\max}\psi_2(\|x\|)^2$, $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$ — наменьшее и наибольшее собственные числа матрицы квадратичной формы P.

Вычислим производную $V(x)$ по векторному полю $\mathbf{B}$ (аргумент x далее для краткости будем опускать):

$$\mathbf{B}V = q\varphi\mathbf{B}\varphi + r\varphi\mathbf{B}\mathbf{A}\varphi + r\mathbf{A}\varphi\mathbf{B}\varphi + s\mathbf{A}\varphi\mathbf{B}\mathbf{A}\varphi = (r\varphi + s\mathbf{A}\varphi)\mathbf{B}\mathbf{A}\varphi.$$

Вследствие регулярности канонического вида (11) $\mathbf{B}\mathbf{A}\varphi \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^2$, поэтому условие $\mathbf{B}V = 0$ равносильно условию $r\varphi + s\mathbf{A}\varphi = 0$, или

$$\varphi = -\frac{s}{r}\mathbf{A}\varphi. \tag{18}$$

Вычислив

$$\mathbf{A}V = q\varphi\mathbf{A}\varphi + r\varphi\mathbf{A}^2\varphi + r(\mathbf{A}\varphi)^2 + s\mathbf{A}\varphi\mathbf{A}^2\varphi = \mathbf{A}\varphi(q\varphi + r\mathbf{A}\varphi) + \mathbf{A}^2\varphi(r\varphi + s\mathbf{A}\varphi),$$

$$\mathbf{C}V = q\varphi\mathbf{C}\varphi + r\varphi\mathbf{C}\mathbf{A}\varphi + r\mathbf{A}\varphi\mathbf{C}\varphi + s\mathbf{A}\varphi\mathbf{C}\mathbf{A}\varphi = (q\varphi + r\mathbf{A}\varphi)\mathbf{C}\varphi + (r\varphi + s\mathbf{A}\varphi)\mathbf{C}\mathbf{A}\varphi,$$

находим

$$\mathbf{A}V\Big|_{\mathbf{B}V=0} = \mathbf{A}\varphi(q\varphi + r\mathbf{A}\varphi) = -\frac{r}{s}\varphi(q\varphi - \frac{r^2}{s}\varphi) = -\frac{r}{s^2}\varphi^2(qs - r^2);$$

$$\mathbf{C}V\Big|_{\mathbf{B}V=0} = (q\varphi + r\mathbf{A}\varphi)\mathbf{C}\varphi = \frac{\varphi}{s}(qs - r^2)\mathbf{C}\varphi;$$

Поэтому

$$\Big(\mathbf{A}V + |\mathbf{C}V|\rho^{-1}(\|x\|)\Big)\Big|_{\mathbf{B}V=0} = \frac{qs - r^2}{s}\Big(-\frac{r}{s}\varphi^2 + |\varphi|\,|\mathbf{C}\varphi|\,\rho^{-1}(\|x\|)\Big).$$

Таким образом, условие (7) принимает следующий вид: для всех не равных нулю x, для которых выполняется условие (18), должно выполняться неравенство

$$|\mathbf{C}\varphi|\rho^{-1}(\|x\|) < |\varphi|\vartheta, \quad \vartheta = r/s, \tag{19}$$

или

$$|\mathbf{C}\varphi| < \frac{\vartheta|\varphi|}{\rho^{-1}(\|x\|)}.$$

Применяя (16), заключаем, что выполнение условия (19) следует из выполнения в новых переменных условия

$$|\mathbf{C}\varphi| < \frac{\vartheta|\varphi|}{\rho^{-1}(\psi_1^{-1}(\|z\|))}.$$

Используя тот факт, что $\|z\| = \sqrt{\varphi^2 + (\mathbf{A}\varphi)^2} = |\varphi|\sqrt{1 + \vartheta^2}$, можем записать достаточное условие канонической стабилизируемости в следующем виде: для того, чтобы система была канонически стабилизируемой, достаточно, чтобы для всех не равных нулю x, для которых выполняется условие (18), выполнялось неравенство

$$|\mathbf{C}\varphi| < \frac{\vartheta|\varphi|}{\rho^{-1}(\psi_1^{-1}(|\varphi|\sqrt{1 + \vartheta^2}))}. \tag{20}$$

(Заметим, что знаменатель правой части не равен нулю нигде, кроме точки 0). С учетом того, что ρ^{-1} может быть произвольной функцией из класса $\mathcal{K}_\infty$, условие (20) можно понимать как ограничение на порядок роста функции $\sigma(\varphi) = \mathbf{C}\varphi(\Phi^{-1}(\varphi, -\vartheta\varphi))$.

Условие (20) во многих случаях проверяется значительно проще исходного критерия (7). Покажем это на примере двух классов двумерных аффинных систем.

1. Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x) + c_1(x)w, \\ \dot{x}_2 = a_2(x) + b_2(x)u + c_2(x)w, \end{cases}$$

где $a_i(x)$, $b_2(x)$, $c_i(x)$, $i = 1,\, 2,$ — гладкие функции, причем $|c_1(x)| < M$, $x \in \mathbb{R}^2$. Предположим, что соответствующая система без возмущений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x), \\ \dot{x}_2 = a_2(x) + b_2(x)u \end{cases}$$

гладким преобразованием $z = \Phi(x) = (\varphi(x),\ \mathbf{A}\varphi(x))^T$, удовлетворяющим (15), приводится к регулярному каноническому виду. Тогда система с возмущением канонически стабилизируема. Действительно,

$$\mathbf{B}\varphi = b_2(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad \mathbf{C}\varphi = c_1(x)\cdot 1 + c_2(x)\cdot 0 = c_1(x).$$

Условие $\mathbf{B}\varphi = 0$ означает, что $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0$, т.е. φ не зависит от x_2 и можно взять $\varphi(x) = x_1$. В (20) можно выбрать

$$\rho^{-1}(r) = \frac{\vartheta}{\sqrt{1+\vartheta^2}}\,\frac{\psi_1(r)}{M}.$$

Тогда условие (18) принимает вид

$$|\mathbf{C}\varphi| < M.$$

Таким образом, все исследуемые подсистемы канонически стабилизируемы управлением (8), причем функция γ в (3) имеет вид

$$\gamma(w) = \psi_1^{-1}\left(\sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}}\,\psi_2\left(\psi_1^{-1}\left(\frac{Mw\sqrt{1+\vartheta^2}}{\vartheta}\right)\right)\right).$$

2. Рассмотрим теперь систему вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x)(1+w) + b_1(x)u, \\ \dot{x}_2 = a_2(x)(1+w) + b_2(x)u, \end{cases}$$

где $a_i(x)$, $b_i(x)$, $i = 1, 2$ — гладкие функции. Предположим, что соответствующая система без возмущений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x) + b_1(x)u, \\ \dot{x}_2 = a_2(x) + b_2(x)u \end{cases}$$

гладким преобразованием $z = \Phi(x) = (\varphi(x),\ \mathbf{A}\varphi(x))^T$, удовлетворяющим (15), приводится к регулярному каноническому виду. Такие системы не являются канонически стабилизируемыми. Действительно, в этом случае $\mathbf{C}\varphi \equiv \mathbf{A}\varphi$, так что $|\mathbf{C}\varphi| = \vartheta|\varphi|$. Очевидно, что (19) не может быть выполнено.

5. Пример

В качестве примера для пояснения изложенного рассмотрим аффинную стационарную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + x_2 + w, \\ \dot{x}_2 = x_1 + c_2(x)w + u, \end{cases}$$

где $c_2(x)$ — произвольная гладкая функция. Эта система канонически стабилизируема при помощи управления (8). Получим оценку влияния возмущений на решения замкнутой системы.

Имеем $\varphi(x) = x_1 = z_1$, $\mathbf{A}\varphi(x) = x_1^2 + x_2 = z_2$, $\mathbf{C}\varphi(x) = 1$. Отсюда несложно получить оценку (15) в виде

$$\frac{\sqrt{1+2\|x\|}-1}{2} \leqslant \|z\| \leqslant \sqrt{2}\|x\|\sqrt{1+\|x\|^2}.$$

Следовательно, можно положить

$$\psi_1(\|x\|) = \frac{\sqrt{1+2\|x\|}-1}{2}, \quad \psi_2(\|x\|) = \sqrt{2}\|x\|\sqrt{1+\|x\|^2},$$

Тогда

$$\psi_1^{-1}(r) = \frac{(2r+1)^2-1}{2},$$

и

$$\gamma(w_{\max}) = \frac{\left(2\sqrt{\dfrac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}}\,\dfrac{(2w_{\max}+1)^2-1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\left(\dfrac{(2w_{\max}+1)^2-1}{2}\right)^2}+1\right)^2-1}{2}.$$

В частности, если $q = 8$, $r = s = 2$, то $\sqrt{\dfrac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}} \approx 2.4842$, а если $w_{\max} = 0.05$, то $\gamma(0.05) \approx 1.65$.

Результаты моделирования процесса управления при различных ограниченных возмущениях приведены на рис. 1–3. Была выбрана функция $c_2(x) \equiv 0$. Моделирование производилось для начальной точки $(0,0)$. Максимальная норма возмущений была выбрана равной 0.05, коэффициенты функции Ляпунова $q = 8$, $r = s = 2$. На рисунках синим цветом показано изменение x_1, зеленым — x_2, красным — норма решения.

рис.1

рис.3

Приведенные результаты моделирования показывают, что условие $\|x(t)\| \leqslant 1.017$ выполняется на заданных отрезках интегрирования для всех трех выбранных типов возмущений.

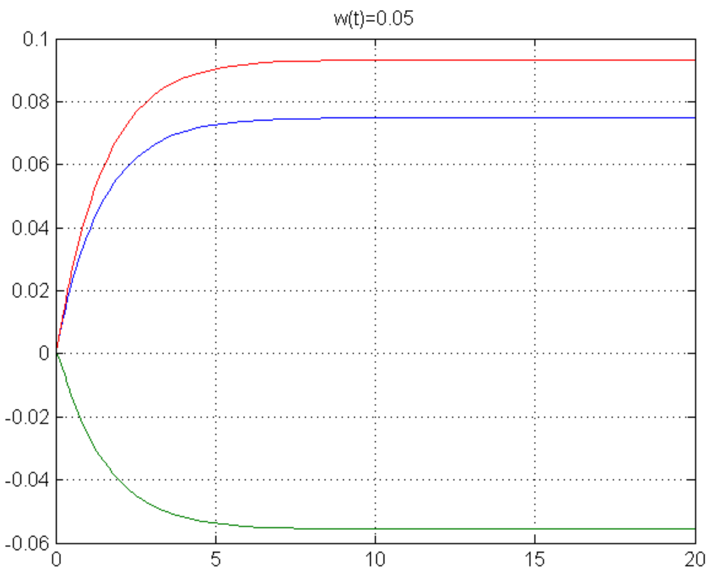

Рис. 1. Моделирование процесса стабилизации, $w(t) = 0.05$

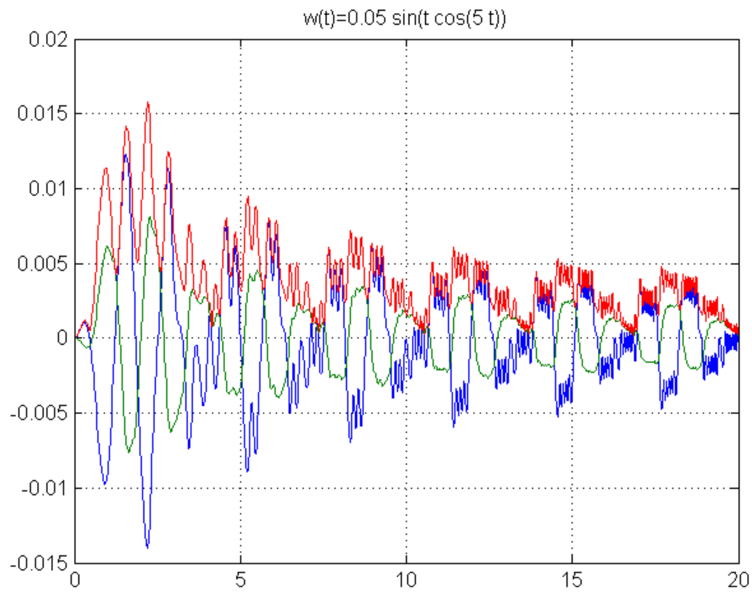

Рис. 2. Моделирование процесса стабилизации, $w(t) = 0.05\sin(t\cos 5t)$

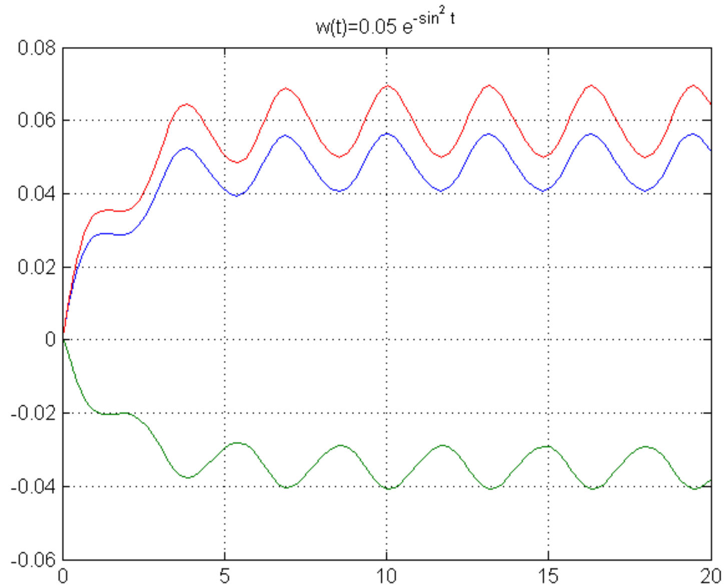

Рис. 3. Моделирование процесса стабилизации, $w(t) = 0.05e^{-\sin^2 t}$

Заключение

В статье предложен критерий глобальной стабилизируемости двумерных аффинных систем с возмущениями при помощи функций Ляпунова, полученных преобразованием этих систем к регулярному каноническому виду. Описаны некоторые классы систем, для которых такая стабилизация возможна. Приведен пример, иллюстрирующий полученные результаты.

Список литературы

1. Krstic M., Deng H. Stabilization of Nonlinear Uncertain Systems. London: Springer-Verlag, 1998. 193 p.
2. Sontag E.D. A ‘universal’ construction of Artstein’s theorem on nonlinear stabilization // Systems & Control Letters. 1989. Vol. 13, no. 2. P. 117–123. DOI: 10.1016/0167-6911(89)90028-5
3. Sontag E.D., Wang Y. On characterizations of the input-to-state stability property // Systems & Control Letters. 1995. Vol. 24, no. 5. P. 351–359. DOI: 10.1016/0167-6911(94)00050-6
4. Дашковский С.Н., Ефимов Д.В., Сонтаг Э.Д. Устойчивость от входа к состоянию и смежные свойства систем // Автоматика и телемеханика. 2011. № 8. р. 3–40.
5. Sontag E.D. Input to state stability: basic concepts and results // Nonlinear and optimal control theory / ed. by P. Nistri, G. Stefani. Springer, 2008. P. 163–220 (ser. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1932). DOI: 10.1007/978-3-540-77653-6_3
6. Sontag E.D. Further facts about input to state stabilization // IEEE Transactions on Automatic Control. 1990. Vol. 35, no. 4. P. 473–476. DOI: 10.1109/9.52307
7. Freeman R.A., Kokotovic P.V. Robust nonlinear control design. Boston: Birkhauser, 1996. 257 p.
8. Краснощёченко В.И., Крищенко А.П. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. 520 с.
9. Isidori A. Nonlinear control systems. 3rd ed. London: Springer, 1995. 550 p. DOI: 10.1007/978-1-84628-615-5
10. Khalil H.K. Nonlinear systems. 2nd ed. New York: Prentice-Hall, 1996. 750 p.

Mathematics & Mathematical Modelling

Electronic journal of the Bauman MSTU

http://mathmjournal.ru

Mathematics and Mathematical Modelling of the Bauman MSTU, 2015, no. 3, pp. 27–38.

DOI: **10.7463/mathm.0315.0789645**

Received: 06.07.2015

On the Problem of 2D Affine Systems Input to State Stabilization

Kavinov A. V.[1,*]

[*]kavinov@newmail.ru

[1]Bauman Moscow State Technical University, Russia

Keywords: stabilization, affine system, Lyapunov function, system with disturbance

Various statements and a variety of solutions to the problem of input-to-state stabilization of dynamic systems with disturbances are known. Methods based on the use of Lyapunov functions play an important role with regard to non-linear systems. When using these methods, the problem of finding an appropriate Lyapunov function arises. The Lyapunov functions redesign method provides a Lyapunov function for a certain subclass of affine systems with disturbances using transformation of the corresponding affine system without disturbances to the equivalent regular canonical form. The desired Lyapunov function is constructed as a quadratic form of the canonical variables. Further, the found Lyapunov function can be used to construct the input-to-state asymptotically stabilizing control. The limits of applicability of this approach remain unclear: in general, constructed on the basis of the transformation to the equivalent canonical form the Lyapunov function for the system without disturbances can both be and not be the Lyapunov function for the affine system with disturbance.

In the paper, we study the possibility of using the described approach to second-order affine systems with scalar control and scalar disturbances for which the corresponding systems without disturbances are equivalent to regular systems of canonical form in the whole state space. We have obtained the easily verifiable conditions for construction of the Lyapunov function on the basis of the regular canonical form where the Lyapunov function for the system with control will be the function for the system with disturbances. Thus, the class of systems which can be stabilized by using the above method is defined. Examples of applications of the obtained conditions with regard to certain classes of second-order affine systems and the results of numerical simulation of the stabilization process of the zero equilibrium point in the presence of various disturbances for the particular two-dimensional system with disturbances are given.

References

1. Krstic M., Deng H. *Stabilization of Nonlinear Uncertain Systems*. London, Springer-Verlag, 1998. 193 p.

2. Sontag E.D. *A ‘universal’ construction of Artstein’s theorem on nonlinear stabilization*. *Systems & Control Letters*, 1989, vol. 13, no. 2, pp. 117–123. DOI: 10.1016/0167- 6911(89)90028-5
3. Sontag E.D., Wang Y. On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems & Control Letters*, 1995, vol. 24, no. 5, pp. 351–359. DOI: 10.1016/0167-6911(94)00050-6
4. Dashkovskiy S.N., Efimov D.V., Sontag E.D. Input to state stability and allied system properties. *Avtomatika i telemehanika*, 2011, no. 8, pp. 3–40 (English version of journal: *Automation and Remote Control*, 2011, vol. 72, iss. 8, pp. 1579–1614. DOI: 10.1134/S0005117911080017)
5. Sontag E.D. Input to State Stability: Basic Concepts and Results. In: *Nonlinear and optimal control theory*, P. Nistri, G. Stefani, eds. Springer, 2008. Pp. 163–220. (Ser. Lecture Notes in Mathematics; vol. 1932). DOI: 10.1007/978-3-540-77653-6_3
6. Sontag E.D. Further facts about input to state stabilization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, vol. 35, no. 4, pp. 473–476. DOI: 10.1109/9.52307
7. Freeman R.A., Kokotovic P.V. *Robust nonlinear control design*. Boston, Birkhauser, 1996, 257 p.
8. Krasnoshchyochenko V.I., Krishchenko A.P. *Nelinejnye sistemy: geometricheskie metody analiza i sinteza* [Nonlinear systems: geometric methods of analysis and synthesis]. M.: Bauman MSTU publ., 2005, 520 p. (in Russian)
9. Isidori A. Nonlinear Control Systems. 3rd ed. London, Springer, 1995, 549 p. DOI: 10.1007/978-1-84628-615-5
10. Khalil H.K. Nonlinear systems. 2nd ed. New York, Prentice-Hall, 1996, 750 p.