



УДК 539.3

Трансверсально изотропный стержень, моделирующий упругие характеристики однослойной углеродной нанотрубки

Зарубин В. С.¹, Сергеева Е. С.^{1,2,*}

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

²АО «Композит», Королев, Россия

* sergeeva_e_s@bmstu.ru

Построена математическая модель, устанавливающая связь упругих характеристик однослойной углеродной нанотрубки (ОУНТ) и однослойного графена. Получены соотношения, связывающие элементы матрицы коэффициентов податливости эквивалентного стержня с модулем Юнга, коэффициентом Пуассона и модулем сдвига графена. Представлены результаты расчетов для ОУНТ с индексами хиральности $(7, 0)$.

Ключевые слова: математическая модель; трансверсально изотропный стержень; однослойная углеродная нанотрубка; графен; упругие характеристики; индексы хиральности

Представлена в редакцию: 25.02.2019.

* Работа выполнена в рамках реализации базовой части государственного задания Минобрнауки РФ (проект 9.7784.2017/БЧ) и гранта РФФИ 18-38-00618 мол_а

Введение

Композиционные материалы (композиты), состоящие из матрицы и армирующих элементов, находят все более широкое применение в различных областях современной техники. Армирование композитов такими элементами, как углеродные нанотрубки (УНТ), позволяет повысить упругие характеристики получаемого конструкционного материала. Современные методы математического моделирования дают возможность оценить эффективность использования УНТ в качестве армирующих элементов композитов. При этом один из подходов связан с условной заменой УНТ сплошным анизотропным волокном с эквивалентными характеристиками, что позволяет для прогнозирования упругих свойств композитов применить известные математические модели, разработанные для волокнистых композитов. Такой подход эффективен не только при оценке упругих характеристик композитов, но и при анализе их теплофизических свойств [1].

В данной работе реализован аналогичный подход на примере однослойной углеродной нанотрубки, представленную в виде круговой цилиндрической оболочки толщиной h , свернутой из листа однослойного графена, толщина которого равна диаметру атома углерода и составляет 0,154 нм [2].

Радиус срединной поверхности оболочки ОУНТ обозначен через R , следовательно, внешний диаметр ОУНТ равен $D = 2R + h$ (рис. 1, *a*).

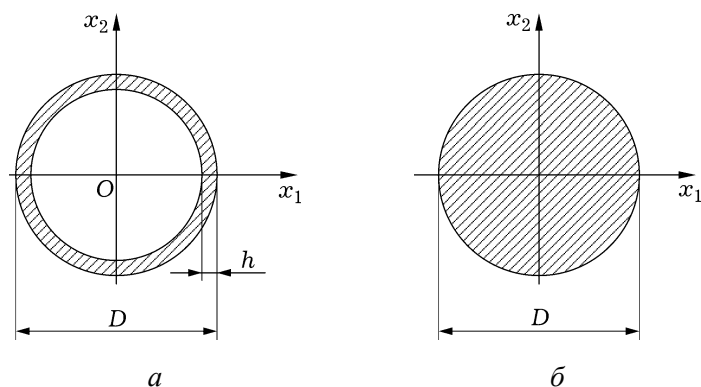


Рис. 1. Аппроксимация ОУНТ оболочкой и стержнем

1. Упругие свойства графена

В силу наличия более трех осей симметрии расположения атомов в плоскости однослойного графена его следует считать изотропным в этой плоскости [3, 4, 5]. Поэтому упругие характеристики графена в плоскости полностью описывают два независимых параметра: продольный модуль упругости (модуль Юнга) E и коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона) ν . Модуль сдвига в плоскости шестиугольных ячеек определяет соотношение [6, 7]

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (1)$$

В данной работе для определенности принято решение использовать следующие значения упругих характеристик графена [8]:

$$E = 1,00 \text{ ТПа}, \quad \nu = 0,28.$$

2. Эквивалентные упругие характеристики стержня

Через Ox_3 , Ox_1 и Ox_2 обозначим продольную ось ОУНТ и координатные оси, располагающиеся в перпендикулярной ей плоскости (см. рис. 1, *a*). При введении такой системы координат с учетом свойств графена в его плоскости плоскость Ox_1x_2 есть плоскость изотропии.

Тогда можно установить соответствие между упругими характеристиками ОУНТ и трансверсально изотропного сплошного круглого цилиндрического стержня, имеющего тот же внешний диаметр D (рис. 1, *б*).

Матрица коэффициентов податливости \mathbf{S} трансверсально изотропного сплошного цилиндрического стержня имеет вид [9]:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{13} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Обратная ей матрица коэффициентов упругости \mathbf{C} выглядит следующим образом:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Связь между элементами матрицы \mathbf{C} и \mathbf{S} определяют соотношения [9]

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{2} \left(\frac{C_{33}}{C_r} + \frac{1}{C_{11} - C_{12}} \right), & S_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{C_{33}}{C_r} - \frac{1}{C_{11} - C_{12}} \right), \\ S_{13} &= -\frac{C_{13}}{C_r}, & S_{33} &= \frac{C_{11} + C_{12}}{C_r}, & S_{44} &= \frac{1}{C_{44}}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$C_r = C_{33}(C_{11} + C_{12}) - 2(C_{12})^2.$$

Эти соотношения справедливы, если в них S заменить на C и C на S .

3. Связь характеристик графена и стержня

Для установления взаимосвязи упругих свойств ОУНТ и упругих характеристик графена в плоскости его изотропии рассмотрены несколько типов нагружения стержня и оболочки, которыми аппроксимирована ОУНТ: силой P , растягивающей вдоль оси ОУНТ, моментом M_z вокруг оси нанотрубки и равномерно распределенным по ее боковой поверхности давлением p . Рассмотрение этих нагружений позволяет записать выражения для элементов матрицы \mathbf{C} через упругие характеристики графена в его плоскости.

При нагружении стержня силой P [5], растягивающей вдоль оси Ox_3 , возникает деформация $\varepsilon_{33} = S_{33}\sigma_{33}$, где $\sigma_{33} = \frac{4P}{\pi D^2}$ — напряжение в поперечном сечении стержня. Это напряжение связано с напряжением, которое возникает в оболочке и равно [5]

$$\sigma'_{33} = \frac{P}{\pi(D-h)h} = \frac{\sigma_{33}}{4(1-\eta)\eta}, \quad (5)$$

где $\eta = h/D$. В изотропном графене такое напряжение в силу закона Гука вызывает деформацию $\varepsilon'_{33} = \sigma'_{33}/E$. Приравняв деформации ε_{33} и ε'_{33} , с учетом соотношения (5) находим [5]

$$S_{33} = \frac{\varepsilon_{33}}{\sigma_{33}} = \frac{\varepsilon'_{33}}{4\sigma_{33}(1-\eta)\eta} = \frac{1}{4E(1-\eta)\eta}. \quad (6)$$

Сила P вызывает в стержне деформации в направлениях осей Ox_1 и Ox_2 , для трансверсально изотропного стержня равные $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = S_{13}\sigma_{33} = S_{23}\sigma_{33}$ [5]. В поперечном сечении стержня возникает напряжение $\sigma_{33} = \frac{4P}{\pi D^2}$. Оно связано с напряжением в оболочке, равным

$$\sigma'_{33} = \frac{P}{\pi(D-h)h} = \frac{\sigma_{33}}{4(1-\eta)\eta}. \quad (7)$$

Такое напряжение в силу обобщенного закона Гука вызывает в изотропном графене деформацию $\varepsilon'_{11} = -\nu\sigma'_{33}/E$. Приравняем деформации ε_{11} и ε'_{11} с учетом соотношения (7) [5]:

$$S_{13} = S_{23} = \frac{\varepsilon_{11}}{\sigma_{33}} = \frac{-\nu\sigma'_{33}}{4E\sigma'_{33}(1-\eta)\eta} = -\frac{\nu}{4E(1-\eta)\eta}. \quad (8)$$

Найдем коэффициенты податливости $S_{44} = S_{55} = 2\varepsilon_{13}/\sigma_{13}$, определяющие связь между деформацией сдвига ε_{13} в плоскости стержня, параллельной его продольной оси Ox_3 , и касательным напряжением σ_{13} в этой плоскости. Для этого рассмотрим нагружение как стержня, так и оболочки, образованной сворачиванием графена, одинаковым крутящим моментом M_3 . Наибольшее касательное напряжение в стержне диаметром D равно [10]

$$\sigma_{13}^* = \frac{16M_3}{\pi D^3},$$

ему соответствует деформация сдвига

$$\varepsilon_{13}^* = \frac{S_{44}\sigma_{13}^*}{2} = \frac{8S_{44}M_3}{\pi D^3}. \quad (9)$$

Нагружение круговой цилиндрической оболочки толщиной h с наружным диаметром D таким же крутящим моментом, дает однородное по толщине касательное напряжение, равное [5, 10]

$$\sigma'_{13} = \frac{M_3}{2\pi R^2 h} = \frac{4M_3}{\pi(D-h)^2 h}.$$

Ему соответствует деформация сдвига

$$\varepsilon'_{13} = \frac{\sigma'_{13}}{2G} = \frac{2M_3}{\pi(D-h)^2 h G}. \quad (10)$$

Приравняем правые части соотношений (9) и (10):

$$S_{44} = S_{55} = \frac{1}{4(1-\eta)^2 \eta G}. \quad (11)$$

Для коэффициентов податливости в плоскости изотропии выполняется равенство

$$S_{66} = 2(S_{11} - S_{12}), \quad (12)$$

которое используем совместно с (1) для нахождения коэффициентов податливости $S_{11} = S_{22}$ и $S_{12} = S_{21}$. Для этого сначала нагрузим стержень давлением p диаметром D , полагая, что давление по боковой поверхности стержня распределено равномерно. При таком нагружении в стержне возникает однородное напряженное состояние с напряжениями $\sigma_{11} = \sigma_{22} = -p$ при $\sigma_{33} \equiv 0$. Однородное деформированное состояние характеризуется компонентами тензора деформации

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = (S_{11} + S_{12})\sigma_{11} = -(S_{11} + S_{12})p \quad (13)$$

и

$$\varepsilon_{33} = S_{31}\sigma_{11} = S_{13}\sigma_{11} = -S_{13}^n p.$$

При этом величина деформации ε_{11} совпадает с относительным уменьшением диаметра стержня. В тонкостенной круговой цилиндрической оболочке при указанном нагружении возникают в окружном (тангенциальном) направлении напряжения

$$\sigma'_t = -\frac{p(D-h)}{2h}$$

и деформация

$$\varepsilon'_t = \frac{\sigma'_t}{E} = -p \frac{D-h}{2Eh}. \quad (14)$$

Эта деформация означает относительное уменьшение диаметра оболочки, эквивалентное уменьшению диаметра стержня. Приравняв правые части (13) и (14), получим

$$S_{11} + S_{12} = \frac{1-\eta}{2\eta E}. \quad (15)$$

Далее использована постановка обратной задачи теории упругости для случая плоской деформации рассматриваемого стержня [6]. Выделена симметричная относительно оси Ox_1 половина поперечного сечения (рис. 2) и задана линейная зависимость перемещения $u_1 = 2U_0x_2/D$ в направлении оси Ox_1 , где U_0 — перемещение точки поверхности стержня с координатами $x_1 = 0$ и $x_2 = D/2$.

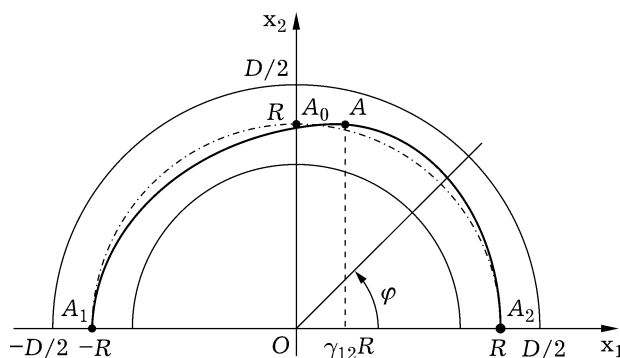


Рис. 2. Расчетная схема постановки обратной задачи теории упругости для случая плоской деформации стержня

Введено предположение, что кинематические граничные условия на поверхности стержня заданы таким образом, что для перемещений в направлении осей Ox_2 и Ox_3 справедливо равенство $u_2 = u_3 = 0$. В этом случае деформированное состояние стержня является однородным, определяемым лишь деформацией $\gamma_{12} = 2U_0/D$, причем $\gamma_{12} \ll 1$. Напряженное состояние стержня также является однородным, называемым чистым сдвигом [7, 11] и определяемым касательными напряжениями $\sigma_{12} = \sigma_{21} = C_{66}\gamma_{12}$. Тогда для потенциальной энергии деформации стержня, приходящейся на единицу его длины и половину поперечного сечения, справедливо соотношение [10]

$$W = \frac{\pi}{8} D^2 C_{66} \frac{\gamma_{12}^2}{2}. \quad (16)$$

Материальная точка A_0 с координатами $x_1 = 0$ и $x_2 = R$ в деформированном состоянии перейдет в точку A с координатами $x_1 = \gamma_{12}R$ и $x_2 = R$ (см. рис. 2). При этом полуокружность радиусом R , соответствующая в поперечном сечении средней поверхности оболочки, примет форму дуги A_1AA_2 , состоящей из двух участков с общей точкой A , каждый из которых является четвертой частью эллипса. Участку A_1A соответствуют в параметрической форме уравнения эллипса

$$x_1 = (1 + \gamma_{12})R \cos \varphi + \gamma_{12}R, \quad x_2 = R \sin \varphi,$$

а участку AA_2 — уравнения эллипса

$$x_1 = (1 - \gamma_{12})R \cos \varphi + \gamma_{12}R, \quad x_2 = R \sin \varphi,$$

в которых роль параметра выполняет угол φ (см. рис. 2).

Точное значение длины четвертой части эллипса определяет полный эллиптический интеграл второго рода [12], не представимый через элементарные функции. При близких значениях полуосей a и b ($a > b$) эллипса его эксцентриситет $e = \sqrt{1 - b^2/a^2} \ll 1$. В этом случае в первом приближении длина четвертой части эллипса может быть вычислена по формуле

$$L = \frac{\pi a}{2} \left(1 - \frac{e^2}{4}\right), \quad (17)$$

в которой сохранены лишь два первых слагаемых разложения в ряд полного эллиптического интеграла второго рода [12]. Для участка A_1A имеем $a = (1 + \gamma_{12})R$ и $b = R$, т.е. в силу малости величины γ_{12} по сравнению с единицей с точностью до γ_{12}^2 получим

$$e_1^2 = 1 - \frac{1}{(1 + \gamma_{12})^2} \approx 2\gamma_{12},$$

а для участка AA_2 — $a = R$ и $b = (1 - \gamma_{12})R$, что привело к аналогичному приближенному равенству $e_2 \approx 2\gamma_{12}$. С использованием формулы (17) для участка A_1A получено

$$L_1 = \frac{\pi R}{2} (1 + \gamma_{12})(1 - \gamma_{12}/2) \approx \frac{\pi R}{2} (1 + \gamma_{12}/2),$$

а для участка AA_2 :

$$L_2 \approx \frac{\pi R}{2}(1 - \gamma_{12}/2).$$

Таким образом, участки A_1A и AA_2 окружности радиусом R с одинаковой до деформирования длиной $L_0 = \pi R/2$ после деформирования первый из них имеет относительное удлинение $\varepsilon_1 = L_1/L_0 - 1 \approx \gamma_{12}/2$, а второй — $\varepsilon_2 = L_2/L_0 - 1 \approx -\gamma_{12}/2$. Тогда суммарное значение потенциальной энергии половины поперечного сечения оболочки единичной длины равно

$$W_0 = \frac{\pi}{8} RhE \gamma_{12}^2. \quad (18)$$

Из равенства $W_0 = W$ с учетом формулы (18) следует

$$C_{66} = \frac{2RhE}{D^2} = (1 - \eta)\eta E. \quad (19)$$

Поскольку

$$C_{66} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2} = \frac{1}{2S_{11} - 2S_{12}},$$

из формул (15) и (19) получим

$$S_{11} = \frac{1 - \eta + \eta^2/2}{2(1 - \eta)\eta E}, \quad S_{12} = \frac{\eta/2 - 1}{2(1 - \eta)E}. \quad (20)$$

В итоге для ОУНТ удалось установить связь всех элементов ее матрицы коэффициентов податливости с упругими характеристиками трансверсально изотропного круглого стержня и параметром η , зависящим от индексов хиральности нанотрубки.

4. Конфигурация ОУНТ

Конфигурация ОУНТ зависит от индексов хиральности (m, n) , указывающих координаты шестиугольника, который в результате сворачивания плоскости должен совпадать с шестиугольником, находящимся в начале выбранной системы координат [5, 13]. Отдельно стоит выделить значения индексов хиральности, при которых сворачивание графеновой плоскости происходит без искажения структуры шестиугольников, которыми она выложена. К таким конфигурациям относят сочетания (n, n) (конфигурация «кресло») и $(m, 0)$ (конфигурация «зигзаг») индексов хиральности.

Для полного описания геометрии нанотрубки необходимо указать ее диаметр [5]. Индексы хиральности однослойной нанотрубки (m, n) однозначным образом определяют ее диаметр D [5, 13]:

$$D = \frac{\sqrt{3}d_0}{\pi} \sqrt{m^2 + n^2 + mn}, \quad (21)$$

где $d_0 = 0,142$ нм — расстояние между соседними атомами углерода в графеновой плоскости.

5. Пример расчета

Количественный анализ представленной математической модели проведен на примере нанотрубки конфигурации «загзаг» с индексами хиральности (7, 0).

При выбранных ранее значениях упругих характеристик однослойного графена для трансверсально изотропного стержня, моделирующего упругие характеристики ОУНТ с индексами хиральности (7, 0), согласно формулам (6), (8), (11), (20), (12), получим (в ТПа⁻¹):

$$S_{33} = 1,237, \quad S_{13} = S_{23} = -0,347, \quad S_{44} = S_{55} = 4,406, \\ S_{11} = S_{22} = 1,877, \quad S_{12} = -0,598, \quad S_{66} = 4,949.$$

Соотношениями (4) определены значения элементов матрицы коэффициентов упругости (в ГПа):

$$C_{33} = 952,656, \quad C_{13} = C_{23} = 258,00, \quad C_{44} = C_{55} = 226,98, \\ C_{11} = C_{22} = 662,758, \quad C_{12} = 258,676, \quad C_{66} = 202,044.$$

Заключение

В работе представлена математическая модель, устанавливающая связь упругих характеристик однослойного графена и ОУНТ. Упругие характеристики ОУНТ моделирует трансверсально изотропный круговой цилиндрический стержень, для элементов матрицы коэффициентов податливости которого получены расчетные формулы. Приведены результаты примера расчетов для ОУНТ с индексами хиральности (7, 0).

Список литературы

1. Сергеева Е.С. Зависимость эквивалентных коэффициентов теплопроводности однослойной углеродной нанотрубки от ее хиральности // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2018. № 2(77). С. 97–106. DOI: [10.18698/1812-3368-2018-2-97-106](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2018-2-97-106)
2. Физические величины. Справочник / Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
3. Вустер У. Применение тензоров и теории групп для описания физических свойств кристаллов: пер. с англ. М.: Мир, 1977. 384 с. [Wooster W.A. Tensors and group theory for the physical properties of crystals. L.: Oxf. Univ. Press, 1973. 344 p.].
4. Сиротин Ю.Н., Шаскольская М.П. Основы кристаллофизики: учеб. пособие. 2-е изд. М.: Наука, 1979. 640 с.
5. Зарубин В.С., Сергеева Е.С. Исследование связи упругих характеристик однослойной углеродной нанотрубки и графена // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 1(64). С. 100–110. DOI: [10.18698/1812-3368-2016-1-100-110](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2016-1-100-110)

6. Демидов С.П. Теория упругости: учеб. М.: Высш. шк., 1979. 432 с.
7. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела: учеб. пособие. 2-е изд. М.: Наука, 1988. 712 с.
8. Беринский И.Е., Кривцов А.М. Об использовании многочастичных межатомных потенциалов для расчета упругих характеристик графена и алмаза // Известия РАН. Механика твердого тела. 2010. № 6. С. 60–85.
9. Зарубин В.С. Прикладные задачи термпрочности элементов конструкций. М.: Машиностроение, 1985. 296 с.
10. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
11. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: учеб. 10-е изд. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 592 с.
12. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 4-е изд. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
13. Елецкий А.В. Углеродные нанотрубки и их эмиссионные свойства // Успехи физических наук. 2002. Т. 172, № 4. С. 401–438. DOI: [10.3367/UFNr.0172.200204b.0401](https://doi.org/10.3367/UFNr.0172.200204b.0401)



Transversely Isotropic Rod for Modeling Elastic Characteristics of Single-Walled Carbon Nanotube

Zarubin V. S.¹, Sergeeva E. S.^{1,2,*}

¹Bauman Moscow State Technical University, Russia

²JSC «Kompozit», Korolev, Russia

* sergeeva_e_s@bmstu.ru

Keywords: mathematical model, transversely isotropic rod, single-walled carbon nanotube, graphene, elastic characteristics, chirality indices

Received: 25.02.2019.

** The work was performed in the framework of the base part of the state job of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project 9.7784.2017/БЧ) and was supported by RFBR (project 18-38-00618 мол.а).*

Single-walled carbon nanotubes (SWCNT) are a seamless cylindrical structure formed by folding a single-walled graphene sheet. Nanotubes are of great interest due to their unique thermo-mechanical characteristics. Such objects can be applied in the energy, rocket and aerospace engineering as a filler of advanced structural composite materials.

One of the most important SWCNT characteristics is a complex of its elastic properties. The most reliable way to determine the elastic characteristics of a nanotube is to conduct an experiment. However, due to high cost and lengthy time of the experiment completion, it is more preferable to use mathematical modeling of these properties of SWCNT with which the paper deals.

The paper proposes a mathematical model that is constructed by methods of generalized continuum mechanics. To use these methods, the nanotube, on the assumption of its transverse isotropy, is presented simultaneously as a cylindrical shell and a continuous circular rod.

As a result of consideration of various stress-strain states of the shell and rod, are obtained relations to establish a quantitative relation between the elements of the matrix of compliance coefficients of a rod that simulates a single-walled carbon nanotube, and the elastic characteristics of graphene taken as its basis in the isotropy plane. Also, the constructed mathematical model allows us to define the influence of the nanotube configuration (chiral indices) on its elastic characteristics.

The paper presents the application results of the model proposed, using as an example, a SWCNT with chirality indices (7, 0), for which were constructed mutually inverse matrices of compliance and elasticity coefficients that completely describe the elastic properties of the nanotube.

Using the proposed mathematical model significantly reduces the time and cost for estimation of the elastic characteristics of the SWCNT, that is especially important at the design stage of new materials based on them.

References

1. Sergeeva E.S. Dependence of thermal-conductivity equivalent coefficients of single-walled carbon nanotubes on its chirality. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennyye nauki* [Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural Sciences], 2018, no.2(77), pp. 97–106. DOI: [10.18698/1812-3368-2018-2-97-106](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2018-2-97-106) (in Russian)
2. *Fizicheskie velichiny: Spravochnik* [Physical quantities: a handbook] / Ed. by I.S. Grigor'ev, E.Z. Mejlikhov. Moscow: Energoatomizdat Publ., 1991. 1232 p. (in Russian).
3. Wooster W.A. *Tensors and group theory for the physical properties of crystals*. L.: Oxf. Univ. Press, 1973. 344 p. (Russ. ed.: Wooster W.A. *Primenenie tenzorov i teorii grupp dlia opisaniia fizicheskikh svoystv kristallov*. Moscow: Mir Publ., 1977. 384 p.).
4. Sirotin Ju.I., Shaskol'skaia M.P. *Osnovy kristallogiziki* [Basics of crystal physics]: a textbook. 2nd ed. Moscow: Nauka Publ., 1979. 640 p. (in Russian).
5. Zarubin V.S., Sergeeva E.S. Investigation of the relationship between elastic properties of a single-walled carbon nanotubes and graphene. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennyye nauki* [Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural Sciences], 2016, no.1(64), pp. 100–110. DOI: [10.18698/1812-3368-2016-1-100-110](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2016-1-100-110) (in Russian).
6. Demidov S.P. *Teoriia uprugosti* [Theory of elasticity]: a textbook. Moscow: Vysshaia shkola Publ., 1979. 432 p. (in Russian).
7. Rabotnov Ju.N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of deformable solids]: a textbook. 2nd ed. Moscow: Nauka Publ., 1988. 712 p. (in Russian).
8. Berinskii I.E., Krivtsov A.M. On using many-particle interatomic potentials to compute elastic properties of graphene and diamond. *Mechanics of Solids*, 2010, vol. 45, no. 6, pp. 815–834. DOI: [10.3103/S0025654410060063](https://doi.org/10.3103/S0025654410060063)
9. Zarubin V.S. *Prikladnye zadachi termoprochnosti elementov konstruktsij* [Applied problems of thermal strength of structural elements]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1985. 296 p. (in Russian).
10. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoj sredy* [Mathematical models of continuum mechanics and electrodynamics]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2008. 512 p. (in Russian).

11. Feodos'ev V.I. *Soprotivlenie materialov* [Strength of materials]: a textbook. 10th ed. Moscow: Bauman MSTU Publ., 1999. 592 p. (in Russian).
12. Gradshtein I.S., Ryzhik I.M. *Tablitsy integralov, summ, riadov i proizvedenij* [Tables of integrals, sums, series and products]. 4th ed. Moscow: Fizmatgiz Publ., 1963. 1100 p. (in Russian).
13. Elets'kij A.V. Carbon nanotubes and their emission properties. *Physics-Uspeski*, 2002, vol. 45, no. 4, pp. 369–402. DOI: [10.1070/PU2002v045n04ABEH001033](https://doi.org/10.1070/PU2002v045n04ABEH001033)