Математика и Математическое моделирование
Сетевое издание
МГТУ им. Н.Э. Баумана
http://mathmjournal.ru

Ссылка на статью:
// Математика и математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 2. С. 1–22.
DOI: 10.7463/mathm.0215.0776859
Представлена в редакцию: 28.03.2015

УДК 517.984.4

Исследования спектральных свойств операторов с разбегающимися возмущениями (обзор)

Головина А. М.[1,*]
[*]nastya_gm@mail.ru
[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

В обзоре дан хронологический обзор исследований операторов с разбегающимися возмущениями. Описаны результаты последних работ по данной тематике и различные виды невозмущенных и возмущающих операторов. Также отмечено, что непотенциальные возмущающие операторы становятся основным объектом исследования только с 2004 года, а вместо операторов Лапласа и Дирака в качестве невозмущенного оператора с 2012 года начинает рассматриваться произвольный эллиптический дифференциальный оператор. В работе дана классификация исследований операторов с разбегающимися возмущениями, основанная на спектральных свойствах рассматриваемых операторов. Приведены результаты исследований многих работ по данной тематике. Сформулированы нерешенные проблемы.

Ключевые слова: спектр; разбегающиеся возмущения; резольвента; собственное значение; собственная функция

Введение

Операторы с разбегающимися возмущениями давно являются объектом исследований в основном зарубежных авторов (см., например, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 34, 35, 36]). Первые работы в этой области начались еще в 60–70-х гг. XX в., однако сам термин «разбегающиеся возмущения» (distant perturbations) был введен относительно недавно чешским математиком Павлом Экнером и российским ученым Д.И. Борисовым [4, 5, 6]. Поясним, что понимается под разбегающимися возмущениями. Классическим примером оператора с разбегающимися возмущениями является дифференциальный оператор $\mathcal{H}_\ell\colon L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ второго порядка с двойной потенциальной ямой:

$$\mathcal{H}_\ell = -\frac{d^2}{dx^2} + \mathrm{V}(\cdot + \ell) + \mathrm{W}(\cdot - \ell).$$

Здесь V, W — вещественные финитные измеримые потенциалы; ℓ — большой положительный параметр. При возрастании параметра ℓ носители потенциалов V, W оператора $\mathcal{H}_\ell$

удаляются друг от друга. Носитель одного потенциала, например, V «бежит» вправо, а носитель второго потенциала W – «бежит» влево, то есть потенциалы «разбегаются» (рис. 1). Именно этим и объясняется термин «разбегающиеся возмущения».

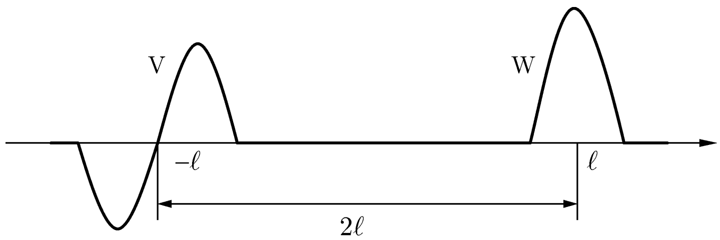

Рис. 1. Пример разбегающихся возмущений

Далее пользуемся следующей терминологией. Возмущающими операторами будем называть сами возмущения. В приведенном выше примере возмущениями или возмущающими операторами являются два потенциала V и W. Под невозмущенным оператором понимается оператор без возмущений. В рассмотренном нами примере - это оператор Лапласа. Сам же оператор $\mathcal{H}_\ell$, который представляет собой сумму невозмущенного оператора и возмущений, будем называть возмущенным оператором.

Тематику статей, написанных с начала 60-х гг. XX в., условно можно разделить на три больших класса:

1) исследования собственных значений и соответствующих им собственных функций оператора Лапласа с разбегающимися потенциалами, в том числе:

а) в случае простого предельного собственного значения [1, 2, 7, 15, 18, 20, 24, 27];

б) в случае кратного предельного собственного значения [12, 13, 17];

2) исследования резольвенты оператора Лапласа с несколькими разбегающимися потенциалалми [3, 22, 8].

3) исследования асимптотического поведения собственных значений, возникающих из края существенного спектра невозмущенного оператора [16, 19, 23, 25, 28, 29].

Под существенным спектром самосопряженного оператора [30, Гл. IX, § 1] понимается объединение непрерывного спектра и множества собственных значений бесконечной кратности.

Основное внимание (по числу статей) уделялось изучению асимптотического поведения собственных значений и собственных функций операторов с разбегающимися возмущениями. Работ, посвященных исследованию резольвенты подобного рода операторов довольно мало.

Отдельно следует выделить ряд работ, которые нельзя отнести ни к одному из описанных выше классов. Это статьи, в которых возмущения задавались не в виде потенциалов, а неким иным образом [4, 5, 6, 10, 11, 21, 32, 34, 35, 36]. Более подробно исследования, проводимые в этих работах, описываются в пятом параграфе.

1. Исследование резольвенты операторов с разбегающимися потенциалами

Для того чтобы понять динамику исследования спектральных свойств операторов с разбегающимися возмущениями, остановимся подробнее на каждой из цитированных выше работ. Обсудим постановки задач и результаты каждой из статей. Начнем с работ, посвященных изучению резольвент операторов с разбегающимися возмущениями, т.е. с рассмотрения статей, относящихся по тематике ко второму классу.

В статье [3] изучалось асимптотическое поведение резольвенты оператора Лапласа в трехмерном пространстве с тремя разбегающимися потенциалами. В указанной работе потенциалы удовлетворяли двум условиям. Первое из этих условий обеспечивало относительную компактность возмущающих потенциалов, а второе – описывало их аналитические свойства. Основными результатами работыявляются:

1) доказательство сходимости резольвенты возмущенного оператора, к резольвенте невозмущенного оператора в смысле сильной резольвентной сходимости;

2) разложение резольвенты возмущенного оператора в ряд Неймана, сходящийся в смысле сильной резольвентной сходимости.

В книге [8, § 8.6] исследовались асимптотические свойства оператора Шредингера с двумя разбегающимися возмущениями в трехмерном пространстве. Возмущениями здесь были два вещественных убывающих на бесконечности потенциала. Главным результатом исследования являлось доказательство сходимости резольвенты унитарного преобразования некоторого матричного оператора, который строился на основе исходного оператора с разбегающимися возмущениями. Заметим, что при этом унитарное преобразование вводилось специальным образом и само зависело от расстояния между разбегающимися потенциалами.

В статье [22] в $\mathbb{R}^3$ рассматривался оператор

$$\mathcal{H}_\ell = -\Delta + \mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2(\cdot - \ell).$$

Здесь $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2$ — вещественнозначные функции класса Ролльника (Rollnik class). Класс Ролльника вводился как множество функций $V = V(x)$, для которых имеет место соотношение

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{|V(x)||V(y)|}{|x-y|^2}\, dxdy < \infty.$$

В работе [22] изучалось поведение резольвенты возмущенного оператора $\mathcal{H}_\ell$ при $|\ell| \to +\infty$. Главным результатом этой работы является доказательство равномерной сходимость к нулю в норме Гильберта — Шмидта оператора

$$(\mathcal{H}_\ell - \lambda)^{-1} - (\mathcal{H}_1 - \lambda)^{-1} - (\mathcal{H}_2 - \lambda)^{-1} + (\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1},$$

где $\mathcal{H}_0 = -\Delta, \mathcal{H}_1 = -\Delta + \mathrm{V}_1, \mathcal{H}_2 = -\Delta + \mathrm{V}_2$, а число λ не принадлежит спектрам операторов $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$. Другими словами, возмущенный оператор $\mathcal{H}_\ell$ «расщеплялся» на три предельных оператора.

2. Исследование собственных значений операторов с разбегающимися потенциалами

Перейдем теперь к рассмотрению работ, посвященных изучению асимптотическое поведение собственных значений и соответствующих им собственных функций, то есть к рассмотрению первого класса.

Случай простого предельного собственного значения. В статьях [1, 2, 7, 15, 18, 20, 24, 27] исследовалось асимптотическое поведение собственных значений и соответствующих им собственных функций оператора Шредингера в пространстве $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ с несколькими разбегающимися возмущениями. Рассматривался случай, когда возмущенное собственное значение сходится к простому предельному собственному значению (т.е. это статьи, которые мы отнесли к первому подклассу первого класса работ). Результаты достаточно большого числа цитированных выше работ, относящихся к данному подклассу, ограничивались описанием первых членов асимптотических разложений. Так, например, возмущениями в [2, 7, 15, 20, 27] являлись потенциалы, удовлетворяющие различным условиям, обеспечивающим гладкость и убывание на бесконечности. Основными результатами этих работ являлись первые члены асимптотических разложений собственных значений и соответствующих им собственных функций в случае простого предельного собственного значения. Отдельно следует отметить работы [1, 24], в которых в качестве возмущений рассматривались кулоновские потенциалы. Главными результатами данных статей являлись полные асимптотические разложения для собственных значений и соответствующих им собственных функций в случае простого предельного собственного значения. Заметим, что формулы для коэффициентов этих рядов выведены не были. Особого внимания, прежде всего из-за полученных результатов, заслуживает работа [18]. В ней разбегающимися возмущениями являлись обычные финитные потенциалы, рассматриваемые в одномерном и трехмерном пространствах. Основной результат данной работы — представления для собственных значений и соответствующих им собственных функций возмущенного оператора в виде равномерно сходящихся рядов в случае простого предельного собственного значения. Кроме того, были выведены оценки на их коэффициенты и показано, что данные ряды одновременно являлись асимптотическими. Отметим, что формулы для коэффициентов этих рядов также выведены не были.

Случай кратного предельного собственного значения. Приступим теперь к рассмотрению статей, посвященных изучению асимптотического поведения собственных значений и соответствующих им собственных функций возмущенного оператора в случае кратного предельного собственного значения, то есть, второму подклассу первого класса статей.

В статьях [12, 13, 17] рассматривался оператор Лапласа с несколькими разбегающимися потенциалами. Изучалось поведение собственных значений данного оператора, когда предельное собственное значение являлось простым собственным значением первого предельного оператора (оператор Лапласа с первым потенциалом) и простым собственным значением второго предельного оператора (оператор Лапласа со вторым потенциалом). Возмущениями в [13, 17] были два убывающие на бесконечности потенциала, а в [12] возмущениями являлись три кулоновские потенциала. Главные результаты работ [13, 17] — первые члены асимптотических разложений собственных значений и соответствующих им собственных функций в случае двукратного предельного собственного значения. Кроме того, в статье [13] было показано, что первые поправки собственных значений возмущенного оператора симметричны относительно нуля, т.е. равны по модулю, но противоположны по знаку. Особо отметим работу [12], основным результатом которой является представления для собственных значений и соответствующих им собственных функций в виде равномерно сходящихся рядов. Выведены оценки на их коэффициенты. Однако формулы для коэффициентов этих рядов получены не были.

В статьях [14, 26] изучалось асимптотическое поведения собственных значений оператора Дирака в трехмерном пространстве в случае простого предельного собственного значения. Заметим, что здесь в качестве невозмущенного оператора рассматривался не оператор Лапласа, а оператор Дирака. В [14] возмущениями были убывающие на бесконечности потенциалы, а в [26] возмущениями являлись кулоновские потенциалы. Главные результаты работ — первые члены асимптотических разложений собственных значений и соответствующих им собственных функций возмущенного оператора в случае простого предельного собственного значения.

3. Исследование собственных значений операторов с разбегающимися возмущениями, возникающими из края существенного спектра

Перейдем теперь к описанию результатов работ, относящихся к третьему классу. В статьях [16, 19, 23, 25, 28, 29] изучалось поведение собственных значений, возникающих из края существенного спектра предельного оператора. Невозмущенным оператором в данных работах являлся оператор Лапласа. В качестве возмущений рассматривались несколько финитных либо кулоновских потенциалов. Предельным оператором в разных случаях являлся либо невозмущенный оператор, либо невозмущенный оператор вместе с одним из потенциалов. Были исследованы различные случаи существования таких собственных значений. Основной результат работ — описание первых членов асимптотических разложений данных собственных значений.

4. Исследование спектральных свойств операторов с разбегающимися возмущениями

Как уже отмечалось выше, имеется ряд статей, в которых возмущения задавались не в виде потенциалов. Например, в [21] изучались свойства спектральных лакун оператора Лапласа, возмущенного дельта-потенциалом. Авторами этой статьи были получены нижние оценки для первой спектральной лакуны оператора Лапласа. Данные оценки применимы и к разбегающемуся дельта-потенциалу. В работе [6] исследовалось асимптотическое поведение собственных значений и соответствующих им собственных функций оператора Лапласа с несколькими разбегающимися возмущениями в случае простого предельного собственного значения. В качестве возмущений рассматривалась смена типа граничных условий. Участки границы, на которых менялся тип граничных условий, находились на большом расстоянии друг от друга. Главный результат работы [6] — первые члены асимптотических рядов для собственных значений и собственных функций в случае простого предельного собственного значения. В [4, 5] исследовалось асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций оператора Лапласа с конечным числом разбегающихся возмущений в многомерном пространстве и бесконечном цилиндре. Возмущающими операторами здесь были произвольные абстрактные локализованные операторы. Локализованность данных возмущений заключалась в том, что каждый из них был определен на некоторой ограниченной области. Была доказана сходимость собственных значений и собственных функций возмущенного оператора к соответствующим им собственным значениям и собственным функциям предельного оператора при произвольной кратности предельного собственного значения. Были получены первые члены асимптотических разложений собственных значений и соответствующих им собственных функций.

В работах [11, 34] в качестве невозмущенного оператора рассматривался многомерный матричный периодический дифференциальный оператор произвольного четного порядка достаточно общего вида. Строго данный оператор вводился следующим образом. В многомерном пространство $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, рассматривалась произвольная периодическая решетка Γ. В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ вводился оператор

$$\mathcal{H}_0 = (-1)^m \sum_{\substack{\beta,\gamma\in\mathbf{Z}_+^d\\ |\beta|=|\gamma|=m}} \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}\,\mathrm{a}_{\beta\gamma}(x)\frac{\partial^\gamma}{\partial x^\gamma} + \sum_{\substack{\beta\in\mathbf{Z}_+^d\\ |\beta|\leqslant 2m-1}} \mathrm{b}_\beta(x)\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}$$

с областью определения $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, где $m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{a}_{\beta\gamma} \in C^m(\mathbb{R}^d)$, $\mathrm{b}_\beta \in C^{2m-1}(\mathbb{R}^d)$ — матричнозначные функции, периодические относительно решетки Γ. Под пространствами $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ понимались соболевские пространства вектор-функций со значениями в $\mathbb{C}^n$. Предполагалось также, что оператор $\mathcal{H}_0$ эллиптичен.

Возмущениями в этих работах являлись произвольные абстрактные операторы, основным свойством которых является локализованность. Локализация возмущений описывалась с помощью специальных весовых функций, входящих в определение возмущающих операторов. На эти весовые функции накладывался определенный набор условий, которые фактически обеспечивали гладкость весовых функций и их убывание на бесконечности вместе с фиксированным набором производных. Строго возмущающие операторы и весовые функции в статьях [11, 34] вводились следующим образом. Пусть $a = a(r)$ — функция из $C^{2m-1}[0, +\infty)$, обращающаяся в нуль в некоторой окрестности нуля, имеющая равномерно ограниченные производные до порядка $(2m-1)$ и удовлетворяющая условию

$$\int\limits_{0}^{+\infty} a(t)\,dt = +\infty.$$

Пусть функции $\varsigma_i \in C^{2m}(\mathbb{R}_+)$ неотрицательны, в некоторой окрестности нуля равны единице и удовлетворяют условию

$$\varsigma_i(r) \leqslant C\exp\Big(-\int\limits_{0}^{r} a(t)\,dt\Big), \quad i = 1,\,\ldots,\,k,$$

где C – некоторая константа, а функции $\eta_i \in C^{2m}(\mathbb{R}_+)$ неотрицательны, в некоторой окрестности нуля равны единице и стремятся к нулю на бесконечности вместе со всеми своими производными вплоть до порядка $2m$.

В качестве возмущающих в работах [11, 34] рассмотрено семейство произвольных операторов $\mathcal{L}_i^0\colon W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $i = 1,\,\ldots,\,,k$, ограниченных как операторы из $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, но, вообще говоря, не являющихся ограниченными как операторы в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Возмущения $\mathcal{L}_i$, $i = 1,\,\ldots,\,k$, конструировались следующим образом:

$$(\mathcal{L}_i u)(x) = \varsigma_i(|x|)\Big(\mathcal{L}_i^0 \eta_i(|\cdot|)u\Big)(x).$$

Эти операторы действуют из пространства $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в пространство $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Возмущающие операторы $\mathcal{L}_i^0$ с обеих сторон оборачивались весовыми функциями. Разбегающиеся возмущения имели вид

$$\sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\,\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i),$$

где $X_i \in \Gamma$ — дискретные параметры; $\mathcal{S}(\cdot)$ — оператор сдвига, действующий по правилу:

$$(\mathcal{S}(Y)u)(x) = u(x+Y), \quad Y \in \Gamma.$$

На дискретные параметры X_i наложено условие $\tau(X) \to +\infty$, где $X = (X_1,\,\ldots,\,X_k)$, $\tau(X) = \min\limits_{i\neq j}|X_i - X_j|$. Ясно, что любые две различные точки X_i переводятся друг в друга с помощью конечного числа сдвигов вдоль решетки Γ.

Если $\mathcal{L}_i = \mathrm{V}_i$ — вещественные ограниченные финитные измеримые потенциалы, то в этом случае разбегающиеся возмущения имеют вид

$$\sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\,\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{V}_i(\cdot - X_i).$$

Схематически поведение такой суммы потенциалов показано на рис. 2. При $\tau(X) \to +\infty$ области, в которых локализовано каждое из возмущений, находятся на большом расстоянии друг от друга, т.е. «разбегаются». Следует также отметить, что если возмущающие операторы являются потенциалами, то условие локализованности превращается в условие

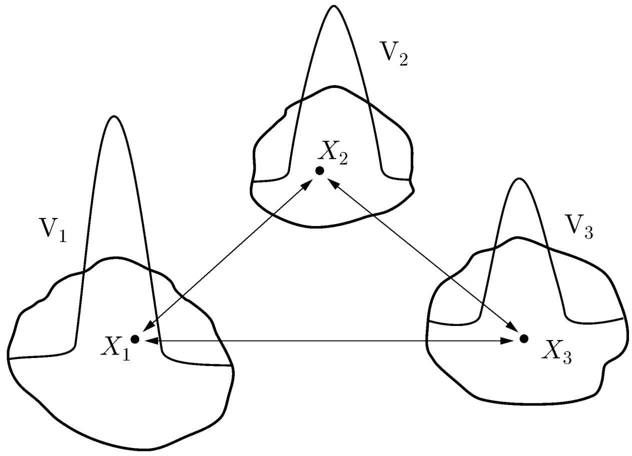

Рис. 2. Финитные разбегающиеся потенциалы

убывания этих потенциалов. При этом в цитированных работах практически отсутствовали ограничения на скорость убывания. Возмущения всех предыдущих работ (за исключением [6]) являются частным случаем возмущений, описанных в работах [11, 34]. Даже абстрактные возмущения в [4, 5] получаются из возмущений из статей [11, 34], если весовые функции финитны. Здесь же класс весовых функций достаточно широк, так как требование, которому они должны удовлетворять — это убывание на бесконечности вместе с конечным набором их производных, причем без каких-либо условий на скорость убывания. Именно поэтому весовыми могут быть разные функции: финитные, экспоненциально убывающие, степенные, логарифмически убывающие.

Заметим, что практически во всех цитированных выше работах невозмущенным оператором являлся либо оператор Лапласа, либо оператор Дирака, а возмущающими операторами были в основном потенциалы. Однако в работах [11, 34] происходит значительное расширение классов невозмущенного оператора и возмущающих операторов. Таким образом, невозмущенными и возмущающими операторами могут быть практически все основные операторы математической физики, например дифференциальный оператор второго порядка, матричный и магнитный операторы Шредингера, оператор теории упругости, оператор Паули, интегральный оператор, псевдодифференциальный оператор, бигармонический оператор и др. В работе [4, п. 8, пример 5] описано преобразование, с помощью которого дельта-потенциал можно свести к дифференциальному оператору второго порядка. Если воспользоваться этим преобразованием, то в качестве возмущающего оператора можно взять и дельта-потенциал.

В статьях [11, 34] исследовалась резольвента возмущенного оператора при стремлении к бесконечности расстояний между областями, в которых локализованы возмущения. Возмущенный оператор в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ с областью определения $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ вводился равенством

$$\mathcal{H}_X = \mathcal{H}_0 + \sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\,\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i).$$

Главным результатом данных работ является явное представление для резольвенты возмущенного оператора. Прежде чем привести соответствующую формулу, введем дополнительные обозначения. Пусть $\sigma(\cdot)$ — спектр оператора, I — тождественный оператор, $\|\cdot\|_{\mathrm{Y}_1\to\mathrm{Y}_2}$ — норма линейного оператора, действующего из нормированного пространства Y_1 в нормированное пространство Y_2. Тогда явная формула для резольвенты возмущенного оператора имеет следующий вид [11, 34]:

$$(\mathcal{H}_X-\lambda)^{-1}=\Big[\sum_{i=1}^{k}\mathcal{S}(-X_i)(\mathcal{H}_i-\lambda)^{-1}\mathcal{S}(X_i)-(k-1)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\Big](\mathrm{I}+\mathcal{P}_X)^{-1},$$

где

$$\mathcal{P}_X=\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k}\mathcal{S}(-X_i)\,\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)\Big[\mathcal{S}(-X_j)(\mathcal{H}_j-\lambda)^{-1}\mathcal{S}(X_j)-(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\Big];$$

$\lambda\in K$; $K=\mathbb{C}\setminus\bigcup\limits_{i=0}^{k}\sigma(\mathcal{H}_i)$; $\mathcal{H}_i=\mathcal{H}_0+\mathcal{L}_i$, $i=1,\,\ldots,\,k$ — операторы, действующие из пространства $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$; $\|\mathcal{P}_X\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\to 0$ при $\tau(X)\to+\infty$. Для получения данного представления автором была разработана новая достаточно простая оригинальная схема. Ее суть заключается в том, что с помощью определенных алгебраических преобразований задача о нахождении резольвенты возмущенного оператора сводится к обращению почти единичного оператора.

Множество K в этих работах предполагалось непустым. Это предположение является достаточно естественным и весьма слабым, так как оно справедливо для довольно широкого класса операторов. Например, $K\neq\varnothing$, если невозмущенный оператор $\mathcal{H}_0$ и операторы $\mathcal{H}_i$, $i=1,\,\ldots,\,k$, являются самосопряженными. Для самосопряженности невозмущенного оператора $\mathcal{H}_0$ достаточно, например, чтобы матрицы $\mathrm{a}_{\beta\gamma}$, b_β были бесконечно дифференцируемы и эрмитовы и матрицы b_β были все равны нулю, кроме b_0. Если же операторы $\mathcal{L}_i$, $i=1,\,\ldots,\,k$, симметричны и нормы данных операторов как операторов из пространства $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в пространство $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ достаточно малы, то по теореме Като — Реллиха [40, Гл. 10, § X.2] операторы $\mathcal{H}_i$, $i=1,\,\ldots,\,k$, также будут самосопряженными.

Для формулировки дальнейших достаточных условий непустоты множества K напомним некоторые понятия [39, Гл. V, § 3]. Оператор $\mathcal{A}$, действующий из пространства Y_1 в пространство Y_2, будем называть квази-m-аккретивным, если найдется некоторое число $\widetilde{\lambda}\in\mathbb{C}$, такое, что для всех $\lambda\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda>0$, оператор $(\mathcal{A}+\widetilde{\lambda}-\lambda)^{-1}$ существует, ограничен и выполнена оценка $\left\|(\mathcal{A}+\widetilde{\lambda}-\lambda)^{-1}\right\|_{\mathrm{Y}_2\to\mathrm{Y}_1}\leqslant\dfrac{1}{\operatorname{Re}\lambda}$. Оператор $\mathcal{A}$, действующий из пространства Y_1 в пространство Y_2, является секториальным, если числовая область его значений $\Big\{(\mathcal{A}u,u)_{\mathrm{Y}_2}\colon u\in\mathcal{D}(A)\Big\}$ является подмножеством некоторого сектора $\Big\{\lambda\in\mathbb{C}\colon|\arg(\lambda-\mu)|\leqslant\vartheta<\dfrac{\pi}{2}\Big\}$, где ϑ — полуугол секториального оператора, а μ — вершина. Оператор $\mathcal{A}$ называется m-секториальным, если он секториален и квази-m-аккретивен.

Форма $\mathfrak{t}$ называется секториальной, если числовая область ее значений $\mathfrak{t}(u)$, $u \in \mathcal{D}(t)$, является подмножеством некоторого сектора $|\arg(\lambda - \mu)| \leqslant \vartheta$, где $0 \leqslant \vartheta < \dfrac{\pi}{2}$ — полуугол секториальной формы, а μ — вершина.

Множество K также заведомо непусто, если операторы $\mathcal{H}_i$ либо операторы $-\mathcal{H}_i$, $i = 0,], \ldots, k$, m-секториальны. Если, например, матрицы $\mathrm{a}_{\beta\gamma}$, b_β бесконечно дифференцируемы и форма, соответствующая невозмущенному оператору $\mathcal{H}_0$, является секториальной, то оператор $\mathcal{H}_0$ будет m-секториальным. Явные условия на возмущающие операторы $\mathcal{L}_i$ для случая m-секториальности операторов $\mathcal{H}_i$, $i = 1, \ldots, k$, в работах [10, 11] не выписаны. Получение этих условие — достаточно сложный процесс, так как теорема, аналогичная теореме Като — Реллиха, не известна. Для секториальных форм наиболее близок к теореме Като — Реллиха результат работы [39] (теорема 3.4 из гл. 6). Воспользовавшись им, можно показать, что формам, построенным по операторам $\mathcal{H}_i$, $i = 1, \ldots, k$, соответствуют некоторые m-секториальные операторы. Здесь основной трудностью является доказательство того, что полученные m-секториальные операторы совпадают с операторами $\mathcal{H}_i$, $i = 1, \ldots, k$. Поэтому вопрос о явных условиях на возмущения $\mathcal{L}_i$, при которых операторы $\mathcal{H}_i$ будут m-секториальными, остается открытым.

На основе выведенного представления для резольвенты возмущенного оператора в статьях [11, 34] доказана равномерная резольвентная сходимость возмущенного оператора к некоторому предельному. При этом предельным является оператор, стоящий в квадратных скобка в формуле для резольвенты возмущенного оператора. Более того, в этих работах также получено разложение резольвенты возмущенного оператора в полный асимптотический ряд, сходящийся в равномерной операторной норме. А именно, оператор $(\mathrm{I} + \mathcal{P}_X)^{-1}$ представим в виде ряда Неймана:

$$(\mathrm{I} + \mathcal{P}_X)^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \mathcal{P}_X^s,$$

так как $\|\mathcal{P}_X\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \to 0$ при $\tau(X) \to +\infty$. Следовательно, резольвента оператора $\mathcal{H}_X - \lambda$ имеет вид

$$(\mathcal{H}_X - \lambda)^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left[\sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}(-X_i)(\mathcal{H}_i - \lambda)^{-1} \mathcal{S}(X_i) - (k-1)(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1} \right] \mathcal{P}_X^s.$$

Данный ряд являясь асимптотическим для резольвенты оператора $\mathcal{H}_X$, сходится в равномерной резольвентной норме $\|\cdot\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}$. Эти результаты были получены без различного рода ограничений, накладываемых на невозмущенный оператор. А именно, невозмущенный оператор не обязательно является симметричным и, следовательно, самосопряженным. Единственное условие, которое накладывается на невозмущенный оператор в данном случае – замкнутость.

В статье [32] результаты работ [11, 34] получены дальнейшие обобщения по следующим направлениям. Во-первых, вместо многомерного пространства $\mathbb{R}^d$ рассматривалась произвольная периодическая область. Во-вторых, невозмущенным оператором в этой статье был не только дифференциальный оператор произвольного порядка, но и некоторый абстрактный оператор, удовлетворяющий определенному набору требований. Было показано, что для такого невозмущенного оператора с конечным числом разбегающихся возмущений также справедливы результаты работ [11, 34].

В работах [10, 35, 36] в качестве возмущенного оператора рассматривался такой же оператор, что и в [11, 34]. Правда, здесь основным объектом исследования была не резольвента возмущенного оператора $\mathcal{H}_X$, а его спектр. Прежде всего интересно поведение существенного и дискретного спектров данного возмущенного оператора.

Обсудим сначала результаты, касающиеся существенного спектра и сходимости собственных значений возмущенного оператора. В статьях [10, 35, 36] в предположении, что невозмущенный и возмущенный операторы самосопряжены, а возмущающие операторы симметричны, была доказана устойчивость существенного спектра возмущенного оператора относительно возмущений. Устойчивость существенного спектра относительно возмущений означает, что при добавлении к невозмущенному оператору $\mathcal{H}_0$ конечного числа разбегающихся возмущений его существенный спектр остается неизменным. При аналогичных предположениях в этих работах доказана также сходимость собственных значений возмущенного оператора к собственным значениям предельного оператора в случае произвольной кратности предельного собственного значения. Другими словами, это означает, что число собственных значений λ_X возмущенного оператора $\mathcal{H}_X$ может быть различным (впрочем, как и кратность каждого из них), но это число (и их кратность) не превышает кратности предельного собственного значения λ_0. Например, если λ_0 — простое изолированное собственное значение одного из операторов $\mathcal{H}_i$, $i = 1, \ldots, k$, например, оператора $\mathcal{H}_1$, не принадлежащее спектрам остальных операторов $\mathcal{H}_i$, $i = 2, \ldots, k$, то собственное значение λ_X возмущенного оператора $\mathcal{H}_X$ также является простым. Если λ_0 — двукратное собственное значение одного из операторов $\mathcal{H}_i$, $i = 1, \ldots, k$, например, оператора $\mathcal{H}_1$, не принадлежащее спектрам остальных операторов $\mathcal{H}_i$, $i = 2, \ldots, k$, то у возмущенного оператора $\mathcal{H}_X$ может быть либо два простых собственных значения, либо одно собственное значение кратности два. Такая же ситуация наблюдается и в том случае, когда λ_0 является простым изолированным собственным значением любых двух операторов $\mathcal{H}_i$, $i = 1, \ldots, k$, например, операторов $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, не принадлежащее спектрам остальных операторов $\mathcal{H}_i$, $i = 3, \ldots, k$, и т.д.

Остановимся теперь подробнее на результатах, касающихся собственных значений возмущенного оператора. В статьях [35, 36] исследовалось поведение собственных значений возмущенного оператора в случае простого предельного собственного значения, т.е. когда λ_0 — простое и изолированное собственное значение оператора $\mathcal{H}_1$, не принадлежащее спектрам операторов $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_i$, $i = 2, \ldots, k$, а ψ_0 — нормированная в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ собственная функция, соответствующая собственному значению λ_0.

В работе [10] изучалось асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций возмущенного оператора в случае двукратного предельного собственного значения. В качестве двух наиболее типичных случаев кратности предельного собственного значения автором были выбраны следующие. В первом случае λ_0 — простое изолированное собственное значение операторов $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, не принадлежащее спектрам остальных операторов $\mathcal{H}_i$, $i = 3, \ldots, k$, а $\psi_{0,j}$, $j = 1, 2$, — соответствующие нормированные в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ собственные функции операторов $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$. Такой случай кратности предельного собственного значения λ_0 назывался случаем кратности $1 + 1$. Аналогичный случай кратности предельного собственного значения рассматривался в работах [4, 5]. Именно в работах [4, 5] введена данная терминология. Во втором случае λ_0 являлось двукратным собственным значением оператора $\mathcal{H}_1$, не принадлежащем спектрам остальных операторов $\mathcal{H}_i$, $i = 2, \ldots, k$, а $\psi_{0,j}$, $j = 1, 2$ — соответствующие нормированные в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ собственные функции. Такой случай кратности собственного значения λ_0 назывался случаем кратности $2+0$. Данный случай кратности не был рассмотрен ранее даже для оператора возмущенного потенциалами.

Существование и сходимость собственных значений возмущенного оператора доказывались на основе результатов о равномерной резольвентной сходимости.

Главными же результатами работ [10, 35, 36] при аналогичных предположениях о самосопряженности и симметричности для невозмущенного, возмущенного и возмущающих операторов являются представления в виде равномерно сходящихся рядов для собственных значений возмущенного оператора, когда предельное собственное значение является простым или двукратным. Более того, в этих работах выведены явные формулы и степенные оценки для их членов. Заметим, что для построения этих рядов была разработана новая довольно простая методика. Суть ее состоит в том, что уравнение на собственные значения возмущенного оператора сводилось к некоторому регулярно возмущенному уравнению в специальном гильбертовом пространстве. При этом малость возмущения удавалось описать двумя характерными малыми параметрами. Применение затем адаптированной версии метода Бирмана — Швингера [33, 31] позволяло свести задачу к анализу операторного уравнения и поиску нулей некоторой голоморфной функции. Анализ данной функции позволял получить представления для собственных значений и соответствующих им собственных функций возмущенного оператора в виде равномерно сходящихся рядов. Для поиска членов построенных рядов также предложен достаточно простой и изящный метод.

Отметим также, что методика, с помощью которой строятся ряды для собственных значений и собственных функций возмущенного оператора применима и в общем случае, т.е. при произвольной кратности предельного собственного значения. Вместе с тем в общем случае процесс построения рядов для собственных значений и собственных функций возмущенного оператора является довольно громоздким. Это объясняется тем, что возникают многочисленные частные случаи, связанные с возможными расщеплениями возмущенных собственных значений. Поэтому случай предельного собственного значения произвольной кратности не был рассмотрен и данный вопрос до сих пор остается открытым.

5. Эффект симметричности первых поправок для собственных значений операторов с разбегающимися возмущениями

При исследовании первых поправок для собственных значений оператора Лапласа в [4, 5] с разбегающимися возмущениями, аналогичными тем, которые рассматривались в [10], но только с финитными весовыми функциями, и аналогичных исследованиях в [13] для оператора Шредингера с парой одинаковых разбегающихся потенциалов был замечен интересный эффект. В случае кратности $1+1$ первые поправки (обозначим их $\Lambda_1^{\pm}$) возмущенных собственных значений λ_X равны по модулю, но противоположны по знаку, т.е. симметричны относительно нуля (рис. 3). Отметим, что при этом на возмущения не наложены никакие существенные дополнительные условия.

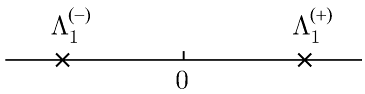

Рис. 3. Первые поправки собственных значений (случай кратности $1+1$)

Случай предельной кратности $2+0$ не был исследован ранее даже для возмущений потенциалами. Согласно формулам, полученным в [10], в этом случае первые поправки возмущенных собственных значений равны нулю и поэтому их также можно считать симметричными относительно нуля (рис. 4). Более того, в [10] замечено, что симметричное расположение первых поправок возмущенных собственных значений относительно нуля является достаточно общим эффектом. А именно, предположим, что число разбегающихся возмущений равно двум ($k=2$), а λ_0 — собственное значение оператора $\mathcal{H}_1$ кратности p и собственное значение оператора $\mathcal{H}_2$ кратности q. Символами $\psi_{0,1}^{(j)}$, $j=1,\,\ldots,\,p$, и $\psi_{0,2}^{(j)}$, $j=1,\,\ldots,\,q$, будем обозначать собственные функции операторов $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, соответствующие собственному значению λ_0. Предполагаем, что $p\leqslant q$. Тогда существует ровно $p+q$ возмущенных собственных значений $\lambda_X^{(j)}$, $j=1,\,\ldots,\,p+q$, сходящихся к λ_0. В этом случае также применима описанная выше схема построения рядов для возмущенных собственных значений и возмущенных собственных функций. Ее применение приводит к аналогичным рядам. Первые члены рядов для возмущенных собственных значений имеют вид

$$\lambda_X^{(j)}=\lambda_0+\Lambda_1^{(j)}+\ldots,\qquad j=1,\,\ldots,\,p+q.$$

Из первых поправок $\Lambda_1^{(j)}$ первые $q-p$ равны нулю. Остальные $2p$ поправок имеют вид $\pm\sqrt{\mu_i}$, $i=1,\,\ldots,\,p$, где μ_i — собственные значения матрицы $\mathrm{B}\,\mathrm{B}^*$ (символом * обоозначено

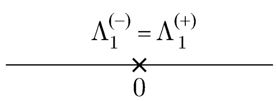

Рис. 4. Первые поправки собственных значений (случай кратности $2+0$)

эрмитово сопряжение), а матрица B задается формулой

$$
\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \left(\mathcal{L}_1\mathcal{S}(X_1 - X_2)\psi_{0,2}^{(1)},\ \psi_{0,1}^{(1)}\right) & \dots & \left(\mathcal{L}_1\mathcal{S}(X_1 - X_2)\psi_{0,2}^{(1)},\ \psi_{0,1}^{(q)}\right) \\ \dots & \dots & \dots \\ \left(\mathcal{L}_1\mathcal{S}(X_1 - X_2)\psi_{0,2}^{(p)},\ \psi_{0,1}^{(1)}\right) & \dots & \left(\mathcal{L}_1\mathcal{S}(X_1 - X_2)\psi_{0,2}^{(p)},\ \psi_{0,1}^{(q)}\right) \end{pmatrix}.
$$

Здесь $(\cdot\,,\,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$.

Другими словами, если λ_0 — предельное собственное значение суммарной кратности $p+q$, то существует ровно $p+q$ собственных значений возмущенного оператора $\mathcal{H}_X$. У $q-p$ таких собственных значений возмущенного оператора $\mathcal{H}_X$ первые поправки равны нулю, а оставшиеся $2p$ собственных значений возмущенного оператора $\mathcal{H}_X$ объединяются в p пар. В каждой такой паре собственных значений первые поправки равны по модулю, но противоположны по знаку (рис. 5). Данный эффект (для двух разбегающихся возмущений) был замечен автором совершенно недавно. Возникает естественный вопрос: сохраняется ли данный эффект при произвольном конечном числе разбегающихся возмущений? Если сохраняется, то при каких условиях? Кроме того, не исследованным остается вопрос об асимптотическом поведении собственных значений и соответствующих им собственных функций возмущенного оператора $\mathcal{H}_X$, возникающих из края существенного спектра. Все эти вопросы являются актуальными и требуют дополнительных исследований.

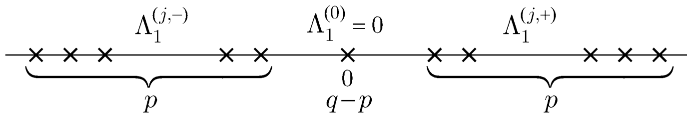

Рис. 5. Первые поправки собственных значений (случай произвольной кратности)

Заключение

В заключение выделим еще раз проблемы, которые так и остались нерешенными. Во-первых, остается открытым вопрос о том, как ведут себя собственные значения возмущенного оператора $\mathcal{H}_X$, возникающие из края существенного спектра. При каком условии они возникают? Как выглядит их асимптотическое разложение? Во-вторых, интересно проверить, сохраняется ли эффект симметричности первых поправок для возмущенных собственных значений в случае произвольного конечного числа возмущений. Если сохраняется, то при каких условиях? В-третьих, можно ли в явном виде выписать условия на возмущения $\mathcal{L}_i$, для которых операторы $\mathcal{H}_i$ будут m-секториальными?

Отметим, что достаточно близкими к задачам с разбегающимися возмущениями являются задачи об операторах с малым параметром перед старшей производной и заданным фиксированным потенциалом. Подобного рода операторы давно являются объектом многочисленных исследований различных авторов. Например, в работах [37, 38, 9] рассматривался оператор Лапласа с малым параметром перед старшей производной и несколькими потенциалами. Исследовалось поведение собственных значений возмущенного оператора как в случае простого, так и в случае двукратного предельного собственного значения. Основным результатом данных работ являются экспоненциальные оценки для первых спектральных лакун. Заметим, что операторы с малым параметром перед старшей производной и несколькими потенциалами с помощью замены переменной можно свести к описанным выше операторам с разбегающимися потенциалами. Однако носители последних будут расширяться одновременно с разбеганием. Во всех цитированных выше работах разбегающиеся возмущения предполагаются фиксированными и именно в этом заключается отличие операторов с разбегающимися возмущениями от операторов с малым параметром перед старшей производной.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда поддержки молодых ученых «Конкурс Мебиуса».

Список литературы

1. Ahlrichs R. Convergence properties of the intermolecular Force series ($1/R$-expansion) // Theoretica Chemica Acta. 1976. Vol. 66, no. 1. P. 7–15. DOI: 10.1007/BF00558020
2. Aktosun T., Klaus M., van der Mee C. On the number of bound states for the one-dimensional Srödinger equation // Journal of Mathematical Physics. 1998. Vol. 39, no. 9. P. 4249–4259. DOI: 10.1063/1.532510
3. Aventini P., Seiler R. On the electronic spectrum of the diatomic molecular ion // Communications in Mathematical Physics. 1975. Vol. 41, no. 2. P. 119–134. DOI: 10.1007/BF01608753
4. Borisov D.I. Asymtotic behaviour of the spectrum of a waveguide with distant perturbation // Mathematical Physics, Analysis and Geometry. 2007. Vol. 10, no. 2. P. 155–196. DOI: 10.1007/s11040-007-9028-1
5. Borisov D.I. Distant perturbation of the Laplacian in a multi-dimensional space // Annales Henri Poincaré. 2007. Vol. 8, no. 7. P. 1371–1399. DOI: 10.1007/s00023-007-0338-4
6. Borisov D.I., Exner P. Exponential splitting of bound states in a waveguide with a pair of distant windows // Journal of Physics A: Mathematics and General. 2004. Vol. 37, no. 10. P. 3411–3428. DOI: 10.1088/0305-4470/37/10/007
7. Davies E.B. The twisting trick for double well Hamiltonians // Communications in Mathematical Physics. 1982. Vol. 85, no. 3. P. 471–479. DOI: 10.1007/BF01208725
8. Davies E.B. Spectral theory and differential operators. New York: Cambridge University Press, 1995. 182 p.
9. Dobrohotov S.Yu., Kolokoltsov V.N, Maslov V.P. Quantization of the Bellman Equation, Exponential Asymptotics and Tunneling // Advances in Soviet mathematics. 1992. Vol. 13. P. 1–46.

10. Golovina A.M. Discrete eigenvalues of periodic operators with distant perturbations // Journal of Mathematical sciences. 2013. Vol. 189, no. 3. P. 342–364.
11. Golovina A.M. On the resolvent of elliptic operators with distant perturbations in the space // Russian Journal of Mathematical Physics. 2012. Vol. 19, no. 2. P. 182–192.
12. Graffi V., Grecchi V., Harrell II E.V, Silverstone H.J. The $1/R$ expansion for H_2^+: analyticity, summability, and asymptotics // Annals of Physics. 1985. Vol. 165, no. 2. P. 441–483. DOI: 10.1016/0003-4916(85)90305-7
13. Harrell E.M. Double wells // Communications in Mathematical Physics. 1980. Vol. 75, no. 3. P. 239–261. DOI: 10.1007/BF01212711
14. Harrell E.M., Klaus M. On the double-well problem for Dirac operators // Annales de l'Institut Henri Poincaré. 1983. Vol. 38, no. 2. P. 153–166.
15. Høegh-Krohn R., Mebkhout M. The $1/r$ Expansion for the Critical Multiple Well Problem // Communications in Mathematical Physics. 1983. Vol. 91, no. 1. P. 65–73. DOI: 10.1007/BF01206050
16. Hunziker W. Cluster properties of multiparticle systems // Journal of Mathematical Pysics. 1965. Vol. 6, no. 1. P. 6–10.
17. Klaus M. Some remarks on double-wells in one and three dimensions // Annales de l'Institut Henri Poincaré. 1981. Vol. 34, no. 4. P. 405–417.
18. Klaus M. On the bound state of Schrödinger operators in one dimension // Annals of Physics. 1977. Vol. 108, no. 2. P. 288–300. DOI: 10.1016/0003-4916(77)90015-X
19. Klaus M., Simon B. Binding of Schrödinger particles through conspiracy of potential wells // Annales de l'Institut Henri Poincaré, section A. 1979. Vol. 30, no. 2. P. 83–87.
20. Klaus M., Simon B. Coupling constants threshold in nonrelativistic quantum mechanics. I. Short-range two-body case // Annals of Physics. 1980. Vol. 130, no. 2. P. 251–281. DOI: 10.1016/0003-4916(80)90338-3
21. Kondej S., Veselić I. Lower bound on the lowest spectral gap of singular potential Hamiltonians // Annales Henri Poincaré. 2007. Vol. 8, no. 1. P. 109–134. DOI: 10.1007/s00023-006-0302-8
22. Kostrykin V., Schrader R. Cluster properties of one particle Schrödinger operators // Reviews in Mathematical Physics. 1994. Vol. 6, no. 5. P. 833–853. DOI: 10.1142/S0129055X94000250
23. Kostrykin V., Schrader R. Scattering theory approach to random Schrödinger operators in one dimension // Reviews in Mathematical Physics. 1999. Vol. 11, no. 2. P. 187–242. DOI: 10.1142/S0129055X99000088
24. Morgan J.D.(III) and Simon B. Behavior of molecular potential energy curves for large nuclear separations // International journal of quantum chemistry. 1980. Vol. 17, no. 2. P. 1143–1166. DOI: 10.1002/qua.560170609
25. Pinchover Y. On the localization of binding for Srödinger operators and its extension to elliptic operators // Journal of mathematical analysis and its applications. 1995. Vol. 41, no. 6. P. 57–83.

26. Reity O.K. Asymptotic expansions of the potential curves of the relativistic quantum-mechanical two-Coulomb-center promlem // Proceeding of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. 2002. Vol. 43, no. 2. P. 672–675.

27. Tamura H. Existence of bound states for double well potentials and the Efimov effect // Functional-Analytic Methods for Partial Differential Equations. Springer Berlin Heidelberg, 1990. P. 173–186. (Ser. Lecture Notes in Mathematics; vol. 1450.). DOI: 10.1007/BFb0084905

28. Wang X.P. On the existence of the N-body Efimov effect // Journal of functional analysis. 2004. Vol. 209, no. 1. P. 137–161. DOI: 10.1016/S0022-1236(03)00170-8

29. Wang X.P., Wang Y. Existence of two-cluster threshold resonances and the N-body Efimov effect // Journal of mathematical physics. 2005. Vol. 46, no. 11. P. 156–182. DOI: 10.1063/1.2118467

30. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. 264 с.

31. Борисов Д.И. Дискретный спектр пары несимметричных волноводов, соединенных окном // Математический сборник. 2006. Т. 197, № 4. С. 3–32.

32. Борисов Д.И., Головина А.М. О резольвентах периодических операторов с разбегающимися возмущениями // Уфимский математический журнал. 2012. Т. 4, № 2. С. 65–74.

33. Гадыльшин Р.Р. О локальных возмущениях оператора Шредингера на оси // Теоретическая и математическая физика. 2002. Т. 132. № 1. С. 97–104.

34. Головина А.М. Резольвенты операторов с разбегающимися возмущениями // Математические заметки. 2012. Т. 91, № 3. С. 464–466.

35. Головина А.М. О дискретном спектре возмущенного периодического дифференциального оператора // Доклады АН. 2013. Т. 448, № 3. С. 258–260.

36. Головина А.М. О спектре периодических эллиптических операторов с разбегающимися возмущениями в пространстве // Алгебра и анализ. 2013. Т. 25, № 5. С. 32–60.

37. Доброхотов С.Ю., Колокольцов В.Н. Об амплитуде расщепления нижних энергетических уровней оператора Шредингера с двумя симметричными ямами // Теоретическая и математическая физика. 1993. Т. 94, № 3. С. 426–434.

38. Доброхотов С.Ю., Колокольцов В.Н, Маслов В.П. Расщепление нижних энергетических уровней уравнения Шредингера и асимптотика фундаментального решения уравнения $hu_t = h^2\Delta u/2 - V(x)u$ // Теоретическая и математическая физика. 1991. Т. 87, № 3. С. 323–375.

39. Като Т. Теория возмущений линейных операторов: пер. с англ. М.: Мир, 1972. 740 с.

40. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. В 3 т. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность: пер. с англ. М.: Мир, 1978. 394 с.

Mathematics & Mathematical Modelling
Electronic journal of the Bauman MSTU
http://mathmjournal.ru

Mathematics and Mathematical Modelling of the Bauman MSTU, 2015, no. 2, pp. 1–22.
DOI: 10.7463/mathm.0215.0776859
Received: 28.03.2015

Investigations in the Spectral Properties of Operators with Distant Perturbations (survey)

Golovina A. M.[1,*]
[*]nastya_gm@mail.ru
[1]Bauman Moscow State Technical University, Russia

Keywords: spectrum, distant perturbations, resolvent, eigenvalue, eigenfunction

We propose a chronological overview of researches on operators with distant perturbations. Let us explain what ”distant perturbations” mean. An elementary example of the operator with distant perturbations is a differential operator of the second order with two finite potentials. Supports of these operators are at a great distance from each other, i.e. they are “distant”.

The study of such operators has been performed since the middle of the last century, mostly by foreign researchers see eg. R. Ahlrichs, T. Aktosun, M. Klaus, P. Aventini, P. Exner, E.B. Davies, V. Graffi, E.V. Harrell II, H.J. Silverstone, M. Mebkhout, R. Höegh-Krohn, W. Hunziker, V. Kostrykin, R. Schrader, J.D. Morgan (III), Y. Pinchover, O.K. Reity, H. Tamura, X. Wang, Y. Wang, S. Kondej, B. Simon, I. Veselič, D.I. Borisov, A.M. Golovina). The main objects of their investigation were the asymptotic behaviors of eigenvalues and corresponding eigenfunctions of perturbed operators. In several papers the research was focused on resolvents and eigenvalues of perturbed operator arising from the edge of the essential spectrum. The main results of the past century are the first members of the asymptotics of perturbed eigenvalues and the corresponding eigenfunctions and the first members of the asymptotics of resolvents of the perturbed operators. The main results of the last fifteen years are full asymptotic expansions for the eigenvalues and their corresponding functions and an explicit formula for the resolvent of the perturbed operator.

In this paper, we also note that up to 2004 only different kind of potentials were considered as perturbing operators, and Laplace and Dirac operators were considered as unperturbed operators. Only since 2004, nonpotential perturbing operators appeared in the literature. Since 2012, an arbitrary elliptic differential operator is considered as an unperturbed operator.

We propose a classification of investigations on distant perturbations, based on the spectral properties of the operators:

1) investigations into the eigenvalues and the corresponding eigenfunctions of the Laplace operator with distant potentials;

(a) in the case of a simple limit eigenvalue;

(b) in the case of a multiple limit eigenvalue;

2) investigations into the resolvent of the Laplace operator with several distant potentials;

3) investigations into asymptotic behavior of the eigenvalues arising from the edge of the essential spectrum of the unperturbed operator.

In conclusion, we formulate open problems in this theory:

1. What kind of behavior of the eigenvalues and the corresponding eigenfunctions arising from the edge of the essential spectrum? Under what conditions do they arise? What is their asymptotic expansion?

2. What are the first members of perturbed eigenvalues in the case of an arbitrary finite number of distant perturbations?

References

1. Ahlrichs R. Convergence properties of the intermolecular Force series ($1/R$-expansion). *Theoretica Chemica Acta*, 1976, vol. 41, no. 1, pp. 7–15. DOI: 10.1007/BF00558020

2. Aktosun T., Klaus M., van der Mee C. On the number of bound states for the one-dimensional Srödinger equation. *Journal of Mathematical Physics*, 1998, vol. 39, no. 9, pp. 4249–4259. DOI: 10.1063/1.532510

3. Aventini P., Seiler R. On the electronic spectrum of the diatomic molecular ion. *Communications in Mathematical Physics*, 1975, vol. 41, no. 2, pp. 119–134. DOI: 10.1007/BF01608753

4. Borisov D.I. Asymtotic behaviour of the spectrum of a waveguide with distant perturbation. *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, 2007, vol. 10, no. 2, pp. 155–196. DOI: 10.1007/s11040-007-9028-1

5. Borisov D.I. Distant perturbation of the Laplacian in a multi-dimensional space. *Annales Henri Poincaré*, 2007, vol. 8, no. 7, pp. 1371–1399. DOI: 10.1007/s00023-007-0338-4

6. Borisov D.I., Exner P. Exponential splitting of bound states in a waveguide with a pair of distant windows. *Journal of Physics A: Mathematics and General*, 2004, vol. 37, no. 10, pp. 3411–3428. DOI: 10.1088/0305-4470/37/10/007

7. Davies E.B. The twisting trick for double well Hamiltonians. *Communications in Mathematical Physics*, 1982, vol. 85, no. 3, pp. 471–479. DOI: 10.1007/BF01208725

8. Davies E.B. *Spectral theory and differential operators*. New York, Cambridge University Press, 1995. 182 p.

9. Dobrohotov S.Yu., Kolokoltsov V.N., Maslov V.P. Quantization of the Bellman Equation, Exponential Asymptotics and Tunneling. *Advances in Soviet Mathematics*, 1992, vol. 13, pp. 1–46.

10. Golovina A.M. Discrete eigenvalues of periodic operators with distant perturbations. *Journal of Mathematical Sciences*, 2013, vol. 189, no. 3, pp. 342–364.

11. Golovina A.M. On the resolvent of elliptic operators with distant perturbations in the space. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 2012, vol. 19, no. 2, pp. 182–192.

12. Graffi V., Grecchi V., Harrell II E.V, Silverstone H.J. The $1/R$ expansion for H_2^+: analyticity, summability, and asymptotics // *Annals of Physics*, 1985, vol. 165, no. 2, pp. 441–483. DOI: 10.1016/0003-4916(85)90305-7

13. Harrell E.M. Double Wells. *Communications in Mathematical Physics*, 1980, vol. 75, no. 3, pp. 239–261. DOI: 10.1007/BF01212711

14. Harrell E.M., Klaus M. On the double-well problem for Dirac operators. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 1983, vol. 38, no. 2, pp. 153–166.

15. Høegh-Krohn R., Mebkhout M. The $1/r$ Expansion for the Critical Multiple Well Problem. *Communications in Mathematical Physics*, 1983, vol. 91, no. 1, pp. 65–73. DOI: 10.1007/BF01206050

16. Hunziker W. Cluster properties of multiparticle systems. *Journal of Mathematical Physics*, 1965, vol. 6, no. 1, pp. 6–10.

17. Klaus M. Some remarks on double-wells in one and three dimensions. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 1981, vol. 34, no. 4, pp. 405–417.

18. Klaus M. On the bound state of Schrödinger operators in one dimension. *Annals of Physics*, 1977, vol. 108, no. 2, pp. 288–300. DOI: 10.1016/0003-4916(77)90015-X

19. Klaus M., Simon B. Binding of Schrödinger particles through conspiracy of potential wells. *Annales de l'Institut Henri Poincaré, section A*, 1979, vol. 30, no. 2, pp. 83–87.

20. Klaus M., Simon B. Coupling constants threshold in nonrelativistic quantum mechanics. I. Short-range two-body case. *Annals of Physics*, 1980, vol. 130, no. 2, pp. 251–281. DOI: 10.1016/0003-4916(80)90338-3

21. Kondej S., Veselić I. Lower bound on the lowest spectral gap of singular potential Hamiltonians. *Annales Henri Poincaré*, 2007, vol. 8, no. 1, pp. 109–134. DOI: 10.1007/s00023-006-0302-8

22. Kostrykin V., Schrader R. Cluster properties of one particle Schrödinger operators. *Reviews in Mathematical Physics*, 1994, vol. 6, no. 5, pp. 833–853. DOI: 10.1142/S0129055X94000250

23. Kostrykin V., Schrader R. Scattering theory approach to random Schrödinger operators in one dimension. *Reviews in Mathematical Physics*, 1999, vol. 11, no. 2, pp. 187–242. DOI: 10.1142/S0129055X99000088

24. Morgan J.D.(III) and Simon B. Behavior of molecular potential energy curves for large nuclear separations. *International Journal of Quantum Chemistry*, 1980, vol. 17, no. 6, pp. 1143–1166. DOI: 10.1002/qua.560170609

25. Pinchover Y. On the localization of binding for Srödinger operators and its extension to elliptic operators. *Journal of Mathematical Analysis and its Applications*, 1995, vol. 41, no. 6, pp. 57–83.

26. Reity O.K. Asymptotic expansions of the potential curves of the relativistic quantum-mechanical two-Coulomb-center problem. *Proceeding of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine*, 2002, vol. 43, no. 2, pp. 672–675.

27. Tamura H. Existence of bound states for double well potentials and the Efimov effect. In: *Functional-Analytic Methods for Partial Differential Equations*. Springer Berlin Heidelberg, 1990, pp. 173-186. (Ser. *Lecture Notes in Mathematics*; vol. 1450). DOI: 10.1007/BFb0084905

28. Wang X.P. On the existence of the N-body Efimov effect. *Journal of Functional Analysis*, 2004, vol. 209, no. 1, pp. 137–161. DOI: 10.1016/S0022-1236(03)00170-8

29. Wang X.P., Wang Y. Existence of two-cluster threshold resonances and the N-body Efimov effect. *Journal of Mathematical Physics*, 2005, vol. 46, no. 11, pp. 156–182. DOI: 10.1063/1.2118467

30. Birman M.Sh., Solomyak M.Z. *Spektral'naya teoriya samosopryazhennykh operatorov v gil'bertovom prostranstve* [Spectral theory of self-adjoint operators in Hilbert space]. Leningrad, LSU Publ., 1980. 264 p. (in Russian).

31. Borisov D.I. Discrete spectrum of an asymmetric pair of waveguides coupled through a window. *Matematicheskii sbornik*, 2006, vol. 197, no. 4, pp. 3–32. (English version of journal: *Sbornik: Mathematics*, 2006, vol. 197, no. 4, pp. 475–504. DOI: 10.1070/SM2006v197n04ABEH003767).

32. Borisov D.I., Golovina A.M. On the resolvents of periodic operators with distant perturbations. *Ufimskii matematicheskii zhurnal = Ufa Mathematical Journal*, 2012, vol. 4, no. 2, pp. 65–74. (in Russian).

33. Gadyl'shin R.R. Local Perturbations of the Schrodinger Operator on the Axis. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika*, 2002, vol. 132, no. 1, pp. 97–104. (English version of journal: *Theoretical and Mathematical Physics*, 2002, vol. 132, iss. 1, pp. 976–982. DOI: 10.1023/A:1019615509634).

34. Golovina A.M. Resolvents of Operators with Distant Perturbations. *Matematicheskie zametki*, 2012, vol. 91, no. 3, pp. 464–466. (English version of journal: *Mathematical Notes*, 2012, vol. 91, no. 3-4, pp. 435–438. DOI: 10.1134/S0001434612030133).

35. Golovina A.M. On the discrete spectrum of periodic differential operators with a distant perturbation. *Doklady AN*, 2013, vol. 448, no. 3, pp. 258–260. (English version of journal: *Doklady Mathematics*, 2013, vol. 87, iss. 1, pp. 42–44. DOI: 10.1134/S106456241301016X).

36. Golovina A.M. On the spectrum of elliptic operators with distant perturbation in the space. *Algebra i analiz*, 2013, vol. 25, no. 5, pp. 32–60. (English version of journal: *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2014, vol. 25, no. 5, pp. 735-754).

37. Dobrokhotov S.Yu., *Kolokol'tsov V.N.* Splitting amplitudes of the lowest energy levels of the Schrodinger operator with double-well potential. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika*,

1993, vol. 94, no. 3, pp. 426–434. (English version of journal: *Theoretical and Mathematical Physics*, 1993, vol. 94, iss. 3, pp. 300–305. DOI: 10.1007/BF01017262).

38. Dobrokhotov S.Yu., Kolokol'tsov V.N., Maslov V.P. Splitting of the lowest energy levels of the Schrödinger equation and asymptotic behavior of the fundamental solution of the equation $hu_t = h^2\Delta u/2 - V(x)u$. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika*, 1991, vol. 87, no. 3, pp. 323–375. (English version of journal: *Theoretical and Mathematical Physics*, 1991, vol. 87, iss. 3, pp. 561–599. DOI: 10.1007/BF01017945).

39. Kato T. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1966. (Ser. *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*; vol. 132). DOI: 10.1007/978-3-662-12678-3 (Russ. ed.: Kato T. *Teoriya vozmushchenii lineinykh operatorov*. Moscow, Mir Publ., 1972. 740 p.).

40. Reed M., Simon B. *Methods of modern mathematical phisycs, vol. 2. Fourier Analysis, Self-Adjointness*. Academic Press, 1975. 361 p. (Russ. ed.: Reed M., Simon B. *Metody sovremennoi matematicheskoi fiziki. T. 2. Garmonicheskii analiz. Samosopriazhennost'*. Moscow, Mir Publ., 1978. 394 p.).