Математика и Математическое моделирование
Сетевое научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана
http://mathm.elpub.ru

Ссылка на статью:
// Математика и математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2017. № 1. С. 25–33.
DOI: **10.24108/mathm.0117.0000057**
Представлена в редакцию: 10.04.2017

УДК 511.361

О приближении значений гипергеометрической функции с параметром из вещественного квадратичного поля

Иванков П. Л.[1,*]

[*] ivankovpl@mail.ru

[1] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

В работе рассматривается гипергеометрическая функция с единственным параметром, являющимся вещественной квадратичной иррациональностью. Получена более точная (в сравнении с известными ранее) оценка снизу модуля линейной формы от значений такой функции и ее производной в отличной от нуля рациональной точке. Для получения этой оценки используется одно тождество из теории специальных функций, что позволяет свести дело к аналогичной оценке для значений другой гипергеометрической функции. Хотя эта последняя функция имеет более сложный вид, ее параметры таковы, что для решения поставленной задачи возможно применение известных методов. Фактически осуществляется ссылка на доказанные ранее теоремы. Уточнение оценки достигается за счет применения особых технических приемов, специально разработанных для решения данной задачи.

Ключевые слова: обобщенные гипергеометрические функции; квадратичная иррациональность; оценка линейной формы

Введение

Рассмотрим функцию

$$K_\lambda(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{x(\lambda+x)}, \tag{1}$$

где $\lambda \neq -1, -2, \ldots$ Эту функцию часто называют функцией, связанной с функцией Бесселя, так как справедливо равенство

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda K_\lambda\left(-\frac{z^2}{4}\right),$$

где $J_\lambda(z)$ — функция Бесселя со значком λ. Арифметическая природа значений функции (1) и ее производной, т.е. чисел

$$K_\lambda(\xi), \quad K'_\lambda(\xi), \quad \xi \neq 0, \tag{2}$$

изучалась во многих работах. Наиболее общие результаты получены при $\lambda \in \mathbb{Q}$ (см. [1, гл. 6, § 2], а также [2]). При рациональных λ была доказана, в частности, алгебраическая независимость чисел (2) при алгебраическом ξ. При иррациональном значении параметра λ обычно удается доказать лишь линейную независимость соответствующих чисел над полем $\mathbb{Q}$ или над мнимым квадратичным полем, и основное внимание здесь уделяется количественным результатам, т.е. получению оценок снизу модуля линейной формы от чисел (2) [3, 4]. В [5] доказана линейная независимость чисел (2) в случае, когда λ берется из мнимого кубического поля. В [6] получена оценка однородной линейной формы от чисел (2) для иррационального λ из вещественного квадратичного поля. В настоящей работе эта оценка уточняется с помощью специальных технических приемов.

1. Результаты

Теорема 1. Пусть $\lambda = p + q\sqrt{D}$, где p и q — рациональные числа, $q \neq 0$, а D — натуральное число, не являющееся точным квадратом. Пусть, далее, p не является целым числом и не равно половине такого числа, h_1 и h_2 — целые рациональные числа, $\xi \neq 0$ — рациональное число, а $H = \max(|h_1|, |h_2|) > 0$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$

$$|h_1 K_\lambda(\xi) + h_2 K'_\lambda(\xi)| > C H^{-15-\varepsilon}, \tag{3}$$

где $C = C(\varepsilon, \xi, \lambda)$ — положительное число, не зависящее от h_1 и h_2.

В работе [6] получена аналогичная оценка, но с заменой числа 15 в показателе степени в правой части (3) на 19. Утверждение теоремы 1 справедливо, например, при $\lambda = \dfrac{1}{3} + \sqrt{2}$.

Теорема 2. Утверждение теоремы 1 останется в силе, если считать, что $p = 0$, отбросив указанные выше ограничения на это число и сохраняя прочие условия упомянутой теоремы.

В частности, оценка (3) справедлива, если $\lambda = \sqrt{2}$.

2. Вспомогательные утверждения

Рассмотрим функцию

$$f(z) = f(\gamma, \delta \,|\, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu 4^\nu}{\nu!} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{\left(\dfrac{\gamma+\delta-1}{2} + x\right)\left(\dfrac{\gamma+\delta}{2} + x\right)}{(\gamma+x)(\delta+x)(\gamma+\delta+1+x)}. \tag{4}$$

Лемма 1. Справедливы равенства

$$K_\gamma(z)\, K_\delta(z) = \frac{z f'(z) + (\gamma+\delta+1) f(z)}{\gamma+\delta+1}, \tag{5}$$

$$K'_\gamma(z)\, K_\delta(z) + K_\gamma(z)\, K'_\delta(z) = \frac{(\gamma+\delta+2) f'(z) + z f''(z)}{\gamma+\delta+1}, \tag{6}$$

$$K'_\gamma(z)\, K'_\delta(z) = \frac{f'(z)}{\gamma+\delta+1}. \tag{7}$$

Доказательство. Рассмотрим равенство (5). Это равенство можно вывести из утверждений, доказанных в [7] и [8]. Приведем независимое доказательство для полноты изложения. Пусть $a^{[0]} = 1$, $a^{[\nu]} = a(a-1)\dots(a-\nu+1)$, $\nu = 1, 2, \dots$ Известно, что

$$(a+b)^{[\nu]} = \sum_{\tau=0}^{\nu} \binom{\nu}{\tau} a^{[\nu-\tau]} b^{[\tau]}$$

(см., например, [9, с. 9, задача 5], [10, с. 24, задача 35]). Пользуясь последним равенством, запишем и преобразуем коэффициент при z^ν в разложении левой части (5) в ряд по степеням z:

$$\sum_{\tau=0}^{\nu} \prod_{x=1}^{\tau} \frac{1}{x(\gamma+x)} \prod_{x=1}^{\nu-\tau} \frac{1}{x(\delta+x)} =$$

$$= \frac{1}{\nu!} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{(\gamma+x)(\delta+x)} \sum_{\tau=0}^{\nu} \binom{\nu}{\tau} (\nu+\gamma)^{[\nu-\tau]} (\nu+\delta)^{[\tau]} =$$

$$= \frac{(2\nu+\gamma+\delta)^{[\nu]}}{\nu!} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{(\gamma+x)(\delta+x)} = \frac{4^\nu}{\nu!} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{\left(\frac{\gamma+\delta-1}{2}+x\right)\left(\frac{\gamma+\delta}{2}+x\right)}{(\gamma+x)(\delta+x)(\gamma+\delta+x)}.$$

Нетрудно проверить, что таким же будет и коэффициент при z^ν в правой части (5). Итак, равенство (5) доказано. Дифференцируя доказанное равенство по z, получим (6); (7) доказывается так же, как и (5). Лемма полностью доказана.

Лемма 2. Пусть $\gamma = p + q\sqrt{D}$, $\delta = p - q\sqrt{D}$ и выполнены условия теоремы 1. Тогда функция (4) и ее производные $f^{(k)}(z)$, $k = 1, 2, 3$, линейно независимы над полем $\mathbb{C}(z)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функции

$$F^{(j)}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)}, \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \tag{8}$$

$$a(x) = (x+\alpha_1)\dots(x+\alpha_r), \quad b(x) = (x+\beta_1)\dots(x+\beta_m), \quad r < m,$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_m$ — комплексные числа, отличные от $-1, -2, \dots$ Для линейной независимости над $\mathbb{C}(z)$ функций (8) необходимо и достаточно, чтобы все разности $\alpha_i - \beta_j$, $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, m$, были отличны от $0, 1, 2, \dots$ Последнее утверждение непосредственно вытекает из теорем, опубликованных в [11] и [12]. В рассматриваемом случае

$$\alpha_1 = p - \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = p, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = p + q\sqrt{D}, \quad \beta_3 = p - q\sqrt{D}, \quad \beta_4 = 2p+1.$$

Непосредственно видно, что если выполняются требования теоремы 1, то выполняются и сформулированные выше условия линейной независимости над $\mathbb{C}(z)$ функций вида (8). Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть выполнены условия теоремы 2 и $\gamma = q\sqrt{D}$, $\delta = -q\sqrt{D}$. Тогда функции $f^{(k)}(z)$, $k = 0, 1, 2$, линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Эта лемма доказывается так же, как и предыдущая. Следует лишь обратить внимание на то, что

$$\prod_{x=1}^{\nu} \left(\frac{\gamma+\delta}{2} + x\right) = \nu!,$$

поэтому
$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}4^{\nu}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{-\dfrac{1}{2}+x}{(q\sqrt{D}+x)(-q\sqrt{D}+x)(1+x)}\,.$$
Далее осуществляется ссылка на теоремы из работ [11] и [12]. Лемма доказана.

3. Доказательства теорем

Пусть выполнены условия теоремы 1 и задана нетривиальная линейная форма
$$l=h_1K_{\lambda}(\xi)+h_2K'_{\lambda}(\xi)$$
с целыми рациональными коэффициентами h_1 и h_2. Обозначим $\bar{\lambda}=p-q\sqrt{D}$ и рассмотрим линейную форму
$$L=(h_1K_{\lambda}(\xi)+h_2K'_{\lambda}(\xi))(h_1K_{\bar{\lambda}}(\xi)+h_2K'_{\bar{\lambda}}(\xi)).$$
В (4)–(7) подставим $\gamma=\lambda$, $\delta=\bar{\lambda}$ и перепишем, пользуясь получившимися равенствами, форму L в виде
$$L=h_1^2\,f(\xi)+\frac{\xi h_1^2+(2p+2)h_1h_2+h_2^2}{2p+1}\,f'(\xi)+\frac{\xi h_1h_2}{2p+1}\,f''(\xi).$$
Пусть θ — такое натуральное число, что $\theta\xi\in\mathbb{Z}$. Тогда $\theta(2p+1)L$ — нетривиальная линейная форма с целыми рациональными коэффициентами от чисел $f(\xi)$, $f'(\xi)$ и $f''(\xi)$. Модуль такой линейной формы можно оценить снизу с помощью теорем, опубликованных в [13] и [14]. В результате получим оценку
$$|L|>C_1H^{-14-\varepsilon}\,.$$
Отсюда и из неравенства
$$0<|h_1K_{\bar{\lambda}}(\xi)+h_2K'_{\bar{\lambda}}(\xi)|<C_2H$$
вытекает утверждение теоремы 1. Замечание по поводу константы C в формулировке этой теоремы относится также и к C_1 и C_2. Теорема 1 доказана.

В случае теоремы 2 функция (4) приобретает вид
$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}4^{\nu}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{-\dfrac{1}{2}+x}{(x^2-q^2D)(1+x)}. \tag{9}$$
Условия теорем из [13] и [14] здесь не выполняются, однако можно применить теорему 1 из [6]. В силу того, что многочлен от x в знаменателе дроби из правой части (9) имеет степень 3, применение упомянутой теоремы приведет к оценке (3), которая точнее оценки из теоремы 3 работы [6]. В остальном доказательство теоремы 2 мало отличается от доказательства теоремы 1. Заметим еще, что в обеих теоремах существенным является то обстоятельство, что коэффициенты степенного ряда из правой части (4) суть рациональные числа.

Заключение

В [7] и [15] приведены различные утверждения о произведениях функций вида (8), одно из которых, как указывалось выше, можно использовать для доказательства равенства (5). Другие утверждения из упомянутых источников также могут использоваться для получения новых результатов об арифметических свойствах значений некоторых функций вида (8) с параметрами из вещественного квадратичного поля.

Список литературы

1. Шидловский А.Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987. 447 с.
2. Siegel C.L. Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen // Abhandlungen der Preussische Akademie der Wissenschaften. Physikalisch-Mathematische Klasse. 1929-1930. № 1. S. 1–70.
3. Osgood C.F. Some theorems on diophantine approximation // Trans. of the American Mathematical Society. 1966. Vol. 123, no. 1. P. 64–87. DOI: 10.2307/1994613
4. Галочкин А.И. Оценки снизу линейных форм от значений некоторых гипергеометрических функций // Математические заметки. 1970. Т. 8, № 1. С. 19–28. DOI: 10.1007/BF01093438
5. Иванков П.Л. О совместных приближениях значений некоторых целых функций числами из кубического поля // Вестник Московского ун-та. Сер. 1: Математика, механика. 1987. № 3. С. 53–56.
6. Иванков П.Л. О линейной независимости значений целых гипергеометрических функций с иррациональными параметрами // Сибирский математический журнал. 1993. Т. 34, № 5. С. 53–62.
7. Bailey W.N. Products of generalised hypergeometric series // Proc. of the London Mathematical Society. 1928. Vol. s2-28, no. 1. P. 242–254. DOI: 10.1112/plms/s2-28.1.242
8. Салихов В.Х. О приводимости и линейной приводимости линейных дифференциальных уравнений // Вестник Московского ун-та. Сер. 1: Математика и механика. 1989. № 3. С. 3–8.
9. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. 10-е изд. М.: Наука, 1990. 624 с.
10. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. 1. М.: Наука, 1978.
    Задачи и теоремы из анализа: пер с нем. Ч. 1. М.: Наука, 1978. 391 с. [Polya G., Szego G. Aufgaben und Lehrsatze aus der Analysis. 3. Aufl. Bd 1. B.; N.Y.: Springer, 1964].
11. Galochkin A.I. On effective bounds for certain linear forms // New Advances in Transcendence theory. Camb.: Camb. Univ. Press, 1988. DOI: 10.1017/CBO97805118971 84.013

12. Galochkin A.I. Linear independence and transcendence of values of hypergeometric functions // Moscow J. of Combinatorics and Number Theory. 2011. Vol. 1, iss. 2. P. 27–32.

13. Иванков П.Л. О линейной независимости значений некоторых функций // Фундаментальная и прикладная математика. 1995. Т. 1, № 1. С. 191–206.

14. Иванков П.Л. О совместных приближениях, учитывающих специфику однородного случая // Математические заметки. 2002. Т. 71, № 3. С. 390–397. DOI: 10.4213/mzm354

15. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: пер. с англ. 2-е изд. Т. 1. М.: Наука, 1973. 294 с. [Higher transcendental functions / H. Bateman, A. Erdelyi. Vol. 1. N.Y.: McGraw-Hill Publ. Co., 1953].

Mathematics & Mathematical Modelling
Electronic journal of the Bauman MSTU
http://mathm.elpub.ru

Mathematics and Mathematical Modelling of the Bauman MSTU, 2017, no. 1, pp. 25–33.
DOI: **10.24108/mathm.0117.0000057**
Received: 10.04.2017

On the Hyper-geometric Function Value Approximation to the Parameter from the Real Quadratic Field

Ivankov P. L.[1,*]

[*] ivankovpl@mail.ru

[1] Bauman Moscow State Technical University, Russia

Keywords: generalized hypergeometric functions, quadratic irrationality, estimate of linear form

While studying arithmetic properties of the values of the generalized hyper-geometric functions there is always a need, arising in the process of reasoning, to have the lower estimate of the modulus of a nonzero algebraic integer. This estimate meets all the requirements only if the above-mentioned algebraic integer is rational or belongs to some imaginary quadratic field. It is by no means always possible to overcome difficulties caused by fact that a nonzero algebraic integer from the arbitrary algebraic field may be arbitrarily small.

Additional problems arise from the fact that the least common denominator of the first coefficients of the hyper-geometric series with irrational parameters grows too fast if tends to infinity. The last circumstance makes it impossible to use a Dirichlet principle for the construction of the initial functional approximating form, and the construction of such a form is usually the first step on the way to obtain the corresponding arithmetic result.

Because of two above-mentioned difficulties, numerous theorems concerning arithmetic properties of the sums of generalized hyper-geometric series with rational parameters cannot be extended to the case when the parameters are taken from the arbitrary field of the algebraic numbers.

In this paper we consider a special type of hyper-geometric function the only parameter of which is a real quadratic irrationality. The above-mentioned difficulties have been overcome here in several steps. The linear approximating form from which a consideration begins is constructed by a special method that simultaneously uses the elements of two different approaches to such a construction: an application of the Dirichlet principle is combined with an effective method. This step is not carried out explicitly in the paper, since the earlier proved theorems are referred to. The difficulty due to the fact that the absolute value of an integer from a real quadratic field can be arbitrarily small has been overcome by means of a certain identity from a theory of special functions. We use also some special techniques to refine the corresponding quantitative results obtained earlier.

References

1. Shidlovskij A.B. *Transtsendentnye chisla* [Transcendental numbers]. Moscow: Nauka Publ., 1987. 447 p. (in Russian).

2. Siegel C.L. *Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen*. Abhandlungen der Preussische Akademie der Wissenschaften. Physikalisch-Mathematische Klasse, 1929-1930, no. 1, s. 1–70.

3. Osgood C.F. Some theorems on diophantine approximation. *Trans. of the American Mathematical Society*, 1966, vol. 123, no. 1, pp. 64-87. DOI: 10.2307/1994613

4. Galochkin A.I. A lower bound for linear forms in values of certain hypergeometric functions. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 1970, vol. 8, no. 1, pp. 478–484. DOI: 10.1007/BF01093438 (in Russian)

5. Ivankov P.L. On joint approximations of values of certain entire functions numbers of cubic fields. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Ser. Matematika, Mekhanika* [Moscow Univ. Mathematics Bulletin], 1987, no. 3, pp. 53–56 (in Russian).

6. Ivankov P.L. On linear independence of the values of entire hypergeometric functions with irrational parameters. *Siberian Mathematical J.*, 1993, vol. 34, no. 5, pp. 839–847. DOI: 10.1007/BF00971400

7. Bailey W.N. Products of generalized hypergeometric series. *Proc. of the London Mathematical Society*, 1928, vol. s2-28, no. 1, pp. 242–254. DOI: 10.1112/plms/s2-28.1.242

8. Salikhov V.Kh. Reducibility and linear reducibility of linear differential equations. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Ser. Matematika, Mekhanika* [Moscow Univ. Mathematics Bulletin], 1989, no. 3, pp. 3–8 (in Russian).

9. Demidovich B.P. *Sbornik zadach i uprazhnenij po matematicheskomu analizu* [A collection of problems and exercises in mathematical analysis]. 10th ed. Moscow, Nauka Publ., 1990. 624 p. (in Russian).

10. Polya G., Szego G. *Aufgaben und Lehrsatze aus der Analysis. 3. Aufl. Bd 1*. B.; N.Y., Springer, 1964. (Russ. ed.: Polya G., Szego G. *Zadachi i teoremy iz analiza*. Moscow, Nauka Publ., 1978. 391 p.).

11. Galochkin A.I. Galochkin A.I. On effective bounds for certain linear forms. *New advances in transcendence theory*. Camb., Camb. Univ. Press, 1988. Pp. 207–214. DOI: 10.1017/CBO09780511897184.013

12. Galochkin A.I. Linear independence and transcendence of values of hypergeometric functions. *Moscow J. of Combinatorics and Number Theory*, 2011, vol. 1, no. 2, pp. 27–32.

13. Ivankov P.L. On linear independence of the values of some functions. *Fundamental'naia i prikladnaia matematika* [Fundamental and Applied Mathematics], 1995, vol. 1, no. 1, pp. 191–205 (in Russian).

14. Ivankov P.L. Simultaneous approximations with regard to the specific character of the homogeneous case. *Mathematical Notes*, 2002, vol. 71, no. 3, pp. 355–361. DOI: 10.1023/A:1014898808012

15. *Higher transcendental functions* / H. Bateman, A. Erdelyi. Vol. 1. N.Y., McGraw-Hill Publ. Co., 1953. (Russ. ed.: Bateman H., Erdelyi A. *Vysshie transtsendentnye funktsii. Vol. 1*. Moscow, Nauka Publ., 1973. 294 p.).