Математика и Математическое моделирование
Сетевое научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана
http://mathm.elpub.ru

Ссылка на статью:
// Математика и математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2016. № 6. С. 15–29.
DOI: **10.24108/mathm.0616.0855437**
Представлена в редакцию: 28.12.2016

УДК 512.552+512.572

О соотношениях в универсальных лиевски нильпотентных ассоциативных алгебрах класса 3

Дерябина Г. С.[1]

*galina_deryabina@mail.ru

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Универсальные лиевски нильпотентные ассоциативные алгебры и алгебры, близкие к ним, активно изучаются последние 10 лет. Для их исследования важное значение имеет информация о соотношениях между порождающими таких универсальных алгебр. Полное описание этих соотношений известно только для алгебр класса нильпотентности 2, 3 и 4. Цель данной статьи — дать новое более простое доказательство для такого описания соотношений в случае класса 3. Ранее известное доказательство для этого описания проводится довольно сложной совместной индукцией по степени некоммутативных многочленов из пяти определенных семейств. В отличие от него доказательство, приведенное в данной статье, основано на использовании ряда упрощений и непосредственных вычислениях и не требует индукции.

Ключевые слова: свободные алгебры; порожденные коммутаторами идеалы; порождающее множество идеала

Введение

Исследование лиевски нильпотентных ассоциативных алгебр была начато в 1947 году С.А. Дженнингсом [1]. В последующие годы такие алгебры изучались во многих работах с разных точек зрения (см., например, статьи [2, 3, 4] и приведенную там библиографию). Интерес к лиевски нильпотентным ассоциативным алгебрам усилился в последнее десятилетие в связи с публикацией в 2007 году пионерской работы Б. Фейгина и Б. Шойхета [8]. Результаты Б. Фейгина и Б. Шойхета были развиты в многочисленных статьях разных авторов, прежде всего П. Этингофа и его учеников (см. обзор [9] и статьи [10, 11, 12]). Исследования лиевски нильпотентных ассоциативных и близких к ним алгебр ведутся в настоящее время и в других направлениях (см., например, [5, 6, 7]).

Пусть R — ассоциативное и коммутативное кольцо с единицей и A — произвольная ассоциативная R-алгебра с единицей. Определим рекурсивно левонормированный коммутатор $[a_1, a_2, \dots, a_n]$, полагая $[a_1, a_2] = a_1a_2 - a_2a_1$, $[a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] = [[a_1, \dots, a_{n-1}], a_n]$, $n \geq 3$. Для любого $n \geq 2$ будем обозначать символом $T^{(n)}(A)$ двусторонний идеал в A, порожденный всеми коммутаторами $[a_1, a_2, \dots, a_n]$, $a_i \in A$. Напомним, что алгебра A называется *лиевски нильпотентной* класса не выше $n-1$ для некоторого $n > 2$, если $T^{(n)}(A) = 0$.

Пусть $R\langle X\rangle$ — свободная ассоциативная R-алгебра с единицей с непустым множеством X свободных порождающих. Пусть $T^{(n)} = T^{(n)}(R\langle X\rangle)$. Фактоалгебра $R\langle X\rangle/T^{(n)}$ является универсальной (в другой терминологии — относительно свободной) лиевски нильпотентной ассоциативной R-алгеброй с единицей класса $n-1$, порожденной множеством X.

Для исследования вопросов, связанных с лиевски нильпотентными ассоциативными алгебрами, важное значение имеет описание минимального, или близкого к минимальному, порождающего множества идеала $T^{(n)}$ как двустороннего идеала в $R\langle X\rangle$, которое, в частности, было бы конечным, если множество X конечно. Ясно, что $T^{(2)}$ порождается как двусторонний идеал в $R\langle X\rangle$ коммутаторами $[x_1, x_2]$ $(x_i \in X)$. Хорошо известно, что идеал $T^{(3)}$ порождается многочленами

$$[x_1, x_2, x_3], \quad [x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4], \quad x_i \in X,$$

это было впервые доказано В.Н. Латышевым [13] в 1963 году в случае, когда R — поле характеристики 0 и потом передоказывалось разными способами для различных колец R (см., например, [10, 14, 15]). Если элемент 3 обратим в R (здесь $3 = 1+1+1$), то порождающее множество для $T^{(4)}$ состоит из многочленов 3 видов (см. [16, 17, 18]):

$$[x_1, x_2, x_3, x_4], \quad x_i \in X;$$

$$[x_1, x_2][x_3, x_4, x_5], x_i \in X;$$

$$\big([x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4]\big)[x_5, x_6], \quad x_i \in X.$$

Этот результат, однако, нельзя распространить на случай произвольного ассоциативного и коммутативного кольца R с единицей, поскольку, если элемент 3 необратим в R (например, если R — это кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ или поле характеристики 3), то, как было доказано А.Н. Красильниковым [19], вообще говоря, $[x_1, x_2][x_3, x_4, x_5] \notin T^{(4)}$.

Пусть $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел. Периодическая часть аддитивной группы $\mathbb{Z}\langle X\rangle/T^{(4)}$ была явно описана в [4]. Это описание опирается на следующий результат [4, Теорема 1.3]:

Теорема 1. Пусть R — произвольное ассоциативное и коммутативное кольцо с единицей, $A = R\langle X\rangle$ — свободная ассоциатиная R-алгебра с непустым множеством X свободных порождающих. Пусть $T^{(4)}$ — двусторонний идеал в A, порожденный всеми коммутаторами $[a_1, a_2, a_3, a_4]$, $a_i \in A$. Тогда идеал $T^{(4)}$ порождается многочленами

$$[x_1, x_2, x_3, x_4], \quad x_i \in X; \tag{1}$$

$$[x_1, x_2, x_3][x_4, x_5, x_6], \quad x_i \in X; \tag{2}$$

$$[x_1, x_2][x_3, x_4, x_5] + [x_1, x_5][x_3, x_4, x_2], \quad x_i \in X; \tag{3}$$

$$[x_1, x_2][x_3, x_4, x_5] + [x_1, x_4][x_3, x_2, x_5], \quad x_i \in X; \tag{4}$$

$$\big([x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4]\big)[x_5, x_6], \quad x_i \in X. \tag{5}$$

Заметим, что порождающее множество двустороннего идеала $T^{(5)}$ было описано в [20]; это множество состоит из многочленов 8 видов.

Пусть I — двусторонний идеал в A, порожденный всеми многочленами(1)–(5). Для доказательства теоремы 1 достаточно установить, что справедливы следующие два утверждения:

1) $I \subseteq T^{(4)}$;

2) $T^{(4)} \subseteq I$.

Цель настоящей статьи — дать новое доказательство п. 2, более простое, чем доказательство, приведенное в работе [4]. Будет доказан следующий результат.

Теорема 2. $T^{(4)} \subseteq I$.

1. Вспомогательные результаты

Хорошо известно и легко проверяется, что для любых $a_i, b \in A$ имеет место

$$[a_1 a_2, b] = [a_1, b]a_2 + a_1[a_2, b]$$

и в общем случае для любого $k \geq 2$

$$[a_1 \dots a_k, b] = \sum_{i=1}^{k} a_1 \dots a_{i-1}[a_i, b]a_{i+1} \dots a_k.$$

Лемма 1. Для любых $x_i \in X$ выполнено

1) $\Big[\Big([x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4]\Big), x_5\Big] \in I$;

2) $\Big[[x_1, x_2][x_3, x_4, x_5], x_6\Big] \in I$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $[x_r, x_s, x_t] + I$ лежит в центре факторалгебры A/I, то

$$\begin{aligned}
&\Big[\Big([x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4]\Big), x_5\Big] = \\
&\quad = [x_1, x_2, x_5][x_3, x_4] + [x_1, x_2][x_3, x_4, x_5] + [x_1, x_3, x_5][x_2, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4, x_5] \equiv \\
&\quad \equiv [x_3,x_4][x_1,x_2,x_5] + [x_1,x_2][x_3,x_4,x_5] + [x_2,x_4][x_1,x_3,x_5] + [x_1,x_3][x_2,x_4,x_5] \pmod{I} = \\
&\quad = -\Big([x_4, x_3][x_1, x_2, x_5] + [x_4, x_2][x_1, x_3, x_5]\Big) - \Big([x_1, x_2][x_4, x_3, x_5] + [x_1, x_3][x_4, x_2, x_5]\Big).
\end{aligned}$$

Так как приведенные выше суммы в скобках имеют вид (4), то

$$\Big[\Big([x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4]\Big), x_5\Big] \in I,$$

т.е. доказано первое утверждение.

Далее,

$$\Big[[x_1, x_2][x_3, x_4, x_5], x_6\Big] = [x_1, x_2, x_6][x_3, x_4, x_5] + [x_1, x_2][x_3, x_4, x_5, x_6] \in I$$

поскольку $[x_1, x_2, x_6][x_3, x_4, x_5] \in I$ и $[x_3, x_4, x_5, x_6] \in I$. Лемма доказана.

Следствие 1. Для любых $x_i \in X$ элементы

$$\Big([x_1,x_2][x_3,x_4] + [x_1,x_3][x_2,x_4]\Big) + I \quad \text{и} \quad [x_1,x_2][x_3,x_4,x_5] + I$$

лежат в центре факторалгебры A/I.

Лемма 2. Для любых $k,\ \ell \geq 0$ и любых $x_r,\ y_s,\ z_t \in X$ выполнено

$$[x_1,x_2]y_1\dots y_k[x_3,x_4]z_1\dots z_\ell[x_5,x_6] + [x_1,x_4]y_1\dots y_k[x_3,x_2]z_1\dots z_\ell[x_5,x_6] \in I.$$

Доказательство. Заметим, что

$$[x_1,x_2]y_1\dots y_k[x_3,x_4] + [x_1,x_4]y_1\dots y_k[x_3,x_2] = y_1[x_1,x_2]y_2\dots y_k[x_3,x_4] +$$
$$+ y_1[x_1,x_4]y_2\dots y_k[x_3,x_2] + [x_1,x_2,y_1]y_2\dots y_k[x_3,x_4] + [x_1,x_4,y_1]y_2\dots y_k[x_3,x_2].$$

Имеем

$$\begin{aligned}&[x_1,x_2,y_1]y_2\dots y_k[x_3,x_4] + [x_1,x_4,y_1]y_2\dots y_k[x_3,x_2] \equiv \\ &\equiv y_2\dots y_k[x_1,x_2,y_1][x_3,x_4] + y_2\dots y_k[x_1,x_4,y_1][x_3,x_2] \pmod I = \\ &= y_2\dots y_k\Big([x_1,x_2,y_1][x_3,x_4] + [x_1,x_4,y_1][x_3,x_2]\Big) \equiv 0 \pmod I,\end{aligned}$$

поскольку

$$[x_1,x_2,y_1][x_3,x_4] + [x_1,x_4,y_1][x_3,x_2] \in I.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}&[x_1,x_2]y_1\dots y_k[x_3,x_4] + [x_1,x_4]y_1\dots y_k[x_3,x_2] \equiv \\ &\equiv y_1[x_1,x_2]y_2\dots y_k[x_3,x_4] + y_1[x_1,x_4]y_2\dots y_k[x_3,x_2] \pmod I.\end{aligned}$$

Повторяя рассуждения, получаем

$$\begin{aligned}&[x_1,x_2]y_1\dots y_k[x_3,x_4] + [x_1,x_4]y_1\dots y_k[x_3,x_2] \equiv \\ &\equiv y_1\dots y_k[x_1,x_2][x_3,x_4] + y_1\dots y_k[x_1,x_4][x_3,x_2] \pmod I = \\ &= y_1\dots y_k\Big([x_1,x_2][x_3,x_4] + [x_1,x_4][x_3,x_2]\Big),\end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned}&[x_1,x_2]y_1\dots y_k[x_3,x_4]z_1\dots z_\ell[x_5,x_6] + [x_1,x_4]y_1\dots y_k[x_3,x_2]z_1\dots z_\ell[x_5,x_6] \equiv \\ &\equiv y_1\dots y_k[x_1,x_2][x_3,x_4]z_1\dots z_\ell[x_5,x_6] + y_1\dots y_k[x_1,x_4][x_3,x_2]z_1\dots z_\ell[x_5,x_6] \pmod I = \\ &= y_1\dots y_k\Big([x_1,x_2][x_3,x_4] + [x_1,x_4][x_3,x_2]\Big)z_1\dots z_\ell[x_5,x_6]. \qquad (6)\end{aligned}$$

Из следствия 1 вытекает

$$\begin{aligned}&\Big([x_1,x_2][x_3,x_4] + [x_1,x_4][x_3,x_2]\Big)z_1\dots z_\ell[x_5,x_6] \equiv \\ &\equiv z_1\dots z_\ell\Big([x_1,x_2][x_3,x_4] + [x_1,x_4][x_3,x_2]\Big)[x_5,x_6] \pmod I.\end{aligned}$$

Так как

$$\big([x_1,x_2][x_3,x_4]+[x_1,x_4][x_3,x_2]\big)[x_5,x_6] = -\big([x_1,x_2][x_4,x_3]+[x_1,x_4][x_2,x_3]\big)[x_5,x_6] \in I,$$

то

$$\big([x_1,x_2][x_3,x_4]+[x_1,x_4][x_3,x_2]\big)z_1\dots z_\ell[x_5,x_6] \equiv 0 \pmod I$$

и поэтому в силу (6)

$$[x_1,x_2]y_1\dots y_k[x_3,x_4]z_1\dots z_\ell[x_5,x_6]+[x_1,x_4]y_1\dots y_k[x_3,x_2]z_1\dots z_\ell[x_5,x_6] \equiv 0 \pmod I),$$

т.е.

$$[x_1,x_2]y_1\dots y_k[x_3,x_4]z_1\dots z_\ell[x_5,x_6]+[x_1,x_4]y_1\dots y_k[x_3,x_2]z_1\dots z_\ell[x_5,x_6] \in I,$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Для любых $a,\ b\in A$ коммутатор $[a,b]$ является линейной комбинацией коммутаторов вида $[d,x]$, где $d\in A$, $x\in X$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что каждый коммутатор $[a,b]$, $a,\ b\in A$, является линейной комбинацией коммутаторов вида $[y_1\dots y_k,\ z_1\dots z_\ell]$, где $k,\ \ell\geq 1$, $y_i,\ z_j\in X$. С другой стороны,

$$\begin{aligned}
&[y_1\dots y_k, z_1\dots z_\ell] = y_1\dots y_k z_1\dots z_\ell - z_1\dots z_\ell y_1\dots y_k = \\
&= (y_1\dots y_k z_1\dots z_\ell - z_\ell y_1\dots y_k z_1\dots z_{\ell-1}) + (z_\ell y_1\dots y_k z_1\dots z_{\ell-1} - z_{\ell-1}z_\ell y_1\dots y_k z_1\dots z_{\ell-2}) + \\
&\qquad + \dots + (z_2\dots z_\ell y_1\dots y_k z_1 - z_1\dots z_\ell y_1\dots y_k) = \\
&= [y_1\dots y_k z_1\dots z_{\ell-1}, z_\ell] + [z_\ell y_1\dots y_k z_1\dots z_{\ell-2}, z_{\ell-1}] + \dots + [z_2\dots z_\ell y_1\dots y_k, z_1].
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 4. Идеал $T^{(4)}$ порождается (как двусторонний идеал в алгебре A) многочленами вида $[a,x_1,b,x_2]$, где $a,\ b\in A$ и $x_i\in X$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 3 каждый коммутатор $[a_1,a_2,a_3,a_4]$, $a_i\in A$, является линейной комбинацией коммутаторов вида $[a,x,b,c]$, где $a,\ b,\ c\in A$, $x\in X$. Ясно, что можно предполагать без потери общности, что $c=y_1\dots y_\ell$ для некоторых $y_i\in X$. Получаем

$$a,x,b,c] = [a,x,b,y_1\dots y_\ell] = \sum_{i=1}^{\ell} y_1\dots y_{i-1}[a,x,b,y_i]y_{i+1}\dots y_\ell.$$

Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы 2

Из леммы 4 следует, что для доказательсва того факта, что $T^{(4)} \subseteq I$, достаточно проверить, что $[a, x_1, b, x_2] \in I$ для любых a, $b \in A$ и $x_i \in X$. Очевидно, что можно предполагать без потери общности, что a, b являются произведениями элементов из X.

Лемма 5. Для любых $a \in A$, $x_i \in X$ выполнены условия:

1) $[a, x_1, x_2, x_3] \in I$;

2) $[x_1, x_2][a, x_3, x_4] + [x_1, x_4][a, x_3, x_2] \in I$;

3) $[x_1, x_2, x_3][a, x_4, x_5] \in I$;

4) $\Big[[x_1, x_2][a, x_3, x_4], x_5\Big] \in I$.

Доказательство. Можно предполагать без потери общности, что $a = y_1 y_2 \ldots y_k$, где $y_i \in X$.

Сначала докажем п. 1. Имеем

$$[a, x_1, x_2, x_3] = [y_1 \ldots y_k, x_1, x_2, x_3] = S_1 + S_2 + S_3,$$

где

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{i=1}^{k} y_1 \ldots y_{i-1}[y_i, x_1, x_2, x_3] y_{i+1} \ldots y_k,\\
S_2 &= \sum_{0 \le i < i' \le k} y_1 \ldots y_{i-1}\Big(\Big([y_i, x_1, x_2] y_{i+1} \ldots y_{i'-1}[y_{i'}, x_3] + [y_i, x_3] y_{i+1} \ldots y_{i'-1}[y_{i'}, x_1, x_2]\Big) +\\
&\qquad + \Big([y_i, x_1, x_3] y_{i+1} \ldots y_{i'-1}[y_{i'}, x_2] + [y_i, x_2] y_{i+1} \ldots y_{i'-1}[y_{i'}, x_1, x_3]\Big) +\\
&\qquad + \Big([y_i, x_2, x_3] y_{i+1} \ldots y_{i'-1}[y_{i'}, x_1] + [y_i, x_1] y_{i+1} \ldots y_{i'-1}[y_{i'}, x_2, x_3]\Big)\Big) y_{i'+1} \ldots y_k,\\
S_3 &= \sum_{0 \le i < i' < i'' \le k} y_1 \ldots y_{i-1}\Big(\Big([y_i, x_1] y_{i+1} \ldots y_{i'-1}[y_{i'}, x_2] y_{i'+1} \ldots y_{i''-1}[y_{i''}, x_3] +\\
&\qquad + [y_i, x_2] y_{i+1} \ldots y_{i'-1}[y_{i'}, x_1] y_{i'+1} \ldots y_{i''-1}[y_{i''}, x_3]\Big) +\\
&\qquad + \Big([y_i, x_1] y_{i+1} \ldots y_{i'-1}[y_{i'}, x_3] y_{i'+1} \ldots y_{i''-1}[y_{i''}, x_2] +\\
&\qquad + [y_i, x_3] y_{i+1} \ldots y_{i'-1}[y_{i'}, x_1] y_{i'+1} \ldots y_{i''-1}[y_{i''}, x_2]\Big) +\\
&\qquad + \Big([y_i, x_2] y_{i+1} \ldots y_{i'-1}[y_{i'}, x_3] y_{i'+1} \ldots y_{i''-1}[y_{i''}, x_1] +\\
&\qquad + [y_i, x_3] y_{i+1} \ldots y_{i'-1}[y_{i'}, x_2] y_{i'+1} \ldots y_{i''-1}[y_{i''}, x_1]\Big)\Big) y_{i''+1} \ldots y_k.
\end{aligned}$$

Ясно, что $S_1 \in I$. Докажем, что $S_2 \in I$.

Действительно,

$$\begin{aligned}
&[y_i, x_1, x_2] y_{i+1} \ldots y_{i'-1}[y_{i'}, x_3] + [y_i, x_3] y_{i+1} \ldots y_{i'-1}[y_{i'}, x_1, x_2] =\\
&\qquad = y_{i+1} \ldots y_{i'-1}[y_{i'}, x_3][y_i, x_1, x_2] + [y_i, x_3][y_{i'}, x_1, x_2] y_{i+1} \ldots y_{i'-1} \equiv\\
&\qquad\qquad \equiv y_{i+1} \ldots y_{i'-1}\Big([y_{i'}, x_3][y_i, x_1, x_2] + [y_i, x_3][y_{i'}, x_1, x_2]\Big) \pmod{I},
\end{aligned}$$

поскольку для любых x_i, y, $y' \in X$ $[y, x_1, x_2] + I$ и $[y, x_3][y', x_1, x_2] + I$ лежат в центре факторалгебры A/I. Так как $[y_{i'}, x_3][y_i, x_1, x_2] + [y_i, x_3][y_{i'}, x_1, x_2] \in I$, то

$$[y_i, x_1, x_2]y_{i+1} \dots y_{i'-1}[y_{i'}, x_3] + [y_i, x_3]y_{i+1} \dots y_{i'-1}[y_{i'}, x_1, x_2] \in I.$$

Аналогично,

$$[y_i, x_1, x_3]y_{i+1} \dots y_{i'-1}[y_{i'}, x_2] + [y_i, x_2]y_{i+1} \dots y_{i'-1}[y_{i'}, x_1, x_3] \in I$$

и

$$[y_i, x_2, x_3]y_{i+1} \dots y_{i'-1}[y_{i'}, x_1] + [y_i, x_1]y_{i+1} \dots y_{i'-1}[y_{i'}, x_2, x_3] \in I.$$

Следовательно, $S_2 \in I$, что и требовалось доказать.

Наконец, из леммы 2 следует, что

$$\begin{aligned}
&[y_i, x_1]y_{i+1} \dots y_{i'-1}[y_{i'}, x_2]y_{i'+1} \dots y_{i''-1}[y_{i''}, x_3] + \\
&\qquad\qquad + [y_i, x_2]y_{i+1} \dots y_{i'-1}[y_{i'}, x_1]y_{i'+1} \dots y_{i''-1}[y_{i''}, x_3] \in I, \\
&[y_i, x_1]y_{i+1} \dots y_{i'-1}[y_{i'}, x_3]y_{i'+1} \dots y_{i''-1}[y_{i''}, x_2] + \\
&\qquad\qquad + [y_i, x_3]y_{i+1} \dots y_{i'-1}[y_{i'}, x_1]y_{i'+1} \dots y_{i''-1}[y_{i''}, x_2] \in I, \\
&[y_i, x_2]y_{i+1} \dots y_{i'-1}[y_{i'}, x_3]y_{i'+1} \dots y_{i''-1}[y_{i''}, x_1] + \\
&\qquad\qquad + [y_i, x_3]y_{i+1} \dots y_{i'-1}[y_{i'}, x_2]y_{i'+1} \dots y_{i''-1}[y_{i''}, x_1] \in I.
\end{aligned}$$

Поэтому $S_3 \in I$.

Таким образом, S_1, S_2, $S_3 \in I$ и $[a, x_1, x_2, x_3] = S_1 + S_2 + S_3 \in I$. Утверждение п. 1 доказано.

Докажем теперь утверждение п. 2. Из п. 1 вытекает, что элемент $[a, x_r, x_s] + I$ лежит в центре факторалгебры A/I для любых $a \in A$, $x_i \in X$, поэтому

$$[x_1, x_2][a, x_3, x_4] + [x_1, x_4][a, x_3, x_2] \equiv [a, x_3, x_4][x_1, x_2] + [a, x_3, x_2][x_1, x_4] \pmod{I}.$$

Ясно, что

$$[a, x_3, x_4][x_1, x_2] + [a, x_3, x_2][x_1, x_4] = S_1' + S_2',$$

где

$$\begin{aligned}
S_1' &= \sum_{i=1}^{k}\Big(y_1 \dots y_{i-1}[y_i, x_3, x_4]y_{i+1} \dots y_k[x_1, x_2] + y_1 \dots y_{i-1}[y_i, x_3, x_2]y_{i+1} \dots y_k[x_1, x_4]\Big), \\
S_2' &= \sum_{1 \le i < i' \le k} y_1 \dots y_{i-1}\Big([y_i, x_3]y_{i+1} \dots y_{i'-1}[y_{i'}, x_4]y_{i'+1} \dots y_k[x_1, x_2] + \\
&\qquad + [y_i, x_4]y_{i+1} \dots y_{i'-1}[y_{i'}, x_3]y_{i'+1} \dots y_k[x_1, x_2] + \\
&\qquad + [y_i, x_3]y_{i+1} \dots y_{i'-1}[y_{i'}, x_2]y_{i'+1} \dots y_k[x_1, x_4] + \\
&\qquad\qquad + [y_i, x_2]y_{i+1} \dots y_{i'-1}[y_{i'}, x_3]y_{i'+1} \dots y_k[x_1, x_4]\Big).
\end{aligned}$$

Так как для любых $y, x_i \in X$ $[y, x_r, x_s] + I$ лежит в центре факторалгебры A/I, то

$$S_1' \equiv \sum_{i=1}^{k} y_1 \dots y_{i-1} y_{i+1} \dots y_k \Big([x_1, x_2][y_i, x_3, x_4] + [x_1, x_4][y_i, x_3, x_2] \Big) \pmod{I}.$$

Для любого i многочлен $[x_1, x_2][y_i, x_3, x_4] + [x_1, x_4][y_i, x_3, x_2]$ имеет вид (3), поэтому он принадлежит идеалу I. Следовательно, $S_1' \in I$.

С другой стороны, по лемме 2

$$[y_i, x_3] y_{i+1} \dots y_{i'-1} [y_{i'}, x_4] y_{i'+1} \dots y_k [x_1, x_2] + [y_i, x_4] y_{i+1} \dots y_{i'-1} [y_{i'}, x_3] y_{i'+1} \dots y_k [x_1, x_2] \in I$$

и

$$[y_i, x_3] y_{i+1} \dots y_{i'-1} [y_{i'}, x_2] y_{i'+1} \dots y_k [x_1, x_4] + [y_i, x_2] y_{i+1} \dots y_{i'-1} [y_{i'}, x_3] y_{i'+1} \dots y_k [x_1, x_4] \in I.$$

Поэтому $S_2' \in I$. Следовательно, $[x_1, x_2][a, x_3, x_4] + [x_1, x_4][a, x_3, x_2] \in I$, как и утверждалось. Утверждение п. 2 доказано.

Теперь докажем утверждение п. 3. Ясно, что

$$[x_1, x_2, x_3][a, x_4, x_5] \equiv [a, x_4, x_5][x_1, x_2, x_3] \pmod{I}$$

и

$$[a, x_4, x_5][x_1, x_2, x_3] = [y_1 y_2 \dots y_k, x_4, x_5][x_1, x_2, x_3] = S_1'' + S_2'',$$

где

$$S_1'' = \sum_{i=1}^{k} y_1 \dots y_{i-1} [y_i, x_4, x_5] y_{i+1} \dots y_k [x_1, x_2, x_3]$$

и

$$S_2'' = \sum_{1 \le i < i' \le k} \Big(y_1 \dots y_{i-1} [y_i, x_4] y_{i+1} \dots y_{i'-1} [y_{i'}, x_5] y_{i'+1} \dots y_k + \\ + y_1 \dots y_{i-1} [y_i, x_5] y_{i+1} \dots y_{i'-1} [y_{i'}, x_4] y_{i'+1} \dots y_k \Big) [x_1, x_2, x_3].$$

Так как для любых x_i, $y \in X$ элемент $[y, x_4, x_5]$ +I лежит в центре факторалгебры A/I и $[y, x_4, x_5][x_1, x_2, x_3] \in I$, как многочлен вида (2), то

$$S_1'' \equiv \sum_{i=1}^{k} y_1 \dots y_{i-1} y_{i+1} \dots y_k [y_i, x_4, x_5][x_1, x_2, x_3] \pmod{I} \equiv 0 \pmod{I},$$

т.е. $S_1'' \in I$.

Далее, так как $[x_1, x_2, x_3] + I$ и $[y, x_i][x_1, x_2, x_3] + I$ для любых $x_j, y \in X$ лежат в центре факторалгебры A/I, то

$$S_2'' \equiv \sum_{1 \le i < i' \le k} y_1 \dots y_{i-1} y_{i+1} \dots y_{i'-1} y_{i'+1} \dots y_k \times \\ \times \Big([y_i, x_4][y_{i'}, x_5] + [y_i, x_5][y_{i'}, x_4] \Big) [x_1, x_2, x_3] \pmod{I}.$$

Имеем

$$\Big([y_i,x_4][y_{i'},x_5]+[y_i,x_5][y_{i'},x_4]\Big)[x_1,x_2,x_3]\equiv$$
$$\equiv\Big([y_i,x_4][x_1,x_2,x_3]+[y_i,x_3][x_1,x_2,x_4]\Big)[y_{i'},x_5]-$$
$$-[y_i,x_3]\Big([y_{i'},x_5][x_1,x_2,x_4]+[y_{i'},x_4][x_1,x_2,x_5]\Big)+$$
$$+\Big([y_i,x_3][x_1,x_2,x_5]+[y_i,x_5][x_1,x_2,x_3]\Big)[y_{i'},x_4]\pmod I.$$

Многочлены в скобках в правой части приведенного выше равенства имеют вид (3) и потому лежат в I. Следовательно, $\Big([y_i,x_4][y_{i'},x_5]+[y_i,x_5][y_{i'},x_4]\Big)[x_1,x_2,x_3]\in I$ для любых i,i' и потому $S_2''\in I$.

Отсюда следует, что $[x_1,x_2,x_3][a,x_4,x_5]\in I$ для любых $a\in A$, $x_i\in X$, как и утверждалось. Утверждение п. 3 доказано.

Наконец, докажем последнее утверждение из п. 4. Ясно, что

$$\Big[[x_1,x_2][a,x_3,x_4],x_5\Big]=[x_1,x_2,x_5][a,x_3,x_4]+[x_1,x_2][a,x_3,x_4,x_5].$$

Согласно п. 2, имеем $[x_1,x_2,x_5][a,x_3,x_4]\in I$, и согласно п. 1 $[a,x_3,x_4,x_5]\in I$. Отсюда следует, что $\Big[[x_1,x_2][a,x_3,x_4],x_5\Big]\in I$. Лемма доказана.

Следствие 2. Для любых $a\in A$, $x_i\in X$ элементы $[a,x_1,x_2]+I$ и $[x_1,x_2][a,x_3,x_4]+I$ лежат в центре факторалгебры A/I.

Теперь приступим к доказательству теоремы 2. Напомним, что достаточно доказать, что $[a,x_1,b,x_2]\in I$ для любых a, $b\in A$, $x_i\in X$. Можно предполагать без потери общности, что $b=z_1\dots z_\ell$, где $z_j\in X$. Имеем

$$[a,x_1,b,x_2]=-\Big[b,[a,x_1],x_2\Big]=-\Big[z_1\dots z_\ell,[a,x_1],x_2\Big]=-(S_1+S_2),$$

где

$$S_1=\sum_{j=1}^{\ell}z_1\dots z_{j-1}\Big[z_j,[a,x_1],x_2\Big]z_{j+1}\dots z_\ell,$$
$$S_2=\sum_{1\le j<j'\le\ell}\Big(z_1\dots z_{j-1}\Big[z_j,[a,x_1]\Big]z_{j+1}\dots z_{j'-1}[z_{j'},x_2]z_{j'+1}\dots z_\ell+$$
$$+z_1\dots z_{j-1}[z_j,x_2]z_{j+1}\dots z_{j'-1}\Big[z_{j'},[a,x_1]\Big]z_{j'+1}\dots z_\ell\Big)=$$
$$=\sum_{1\le j<j'\le\ell}z_1\dots z_{j-1}\bigg(\Big[z_j,[a,x_1]\Big]z_{j+1}\dots z_{j'-1}[z_{j'},x_2]+$$
$$+[z_j,x_2]z_{j+1}\dots z_{j'-1}\Big[z_{j'},[a,x_1]\Big]\bigg)z_{j'+1}\dots z_\ell.$$

Согласно лемме 5 i) имеем $[a,x_1,z_j,x_2]\in I$, поэтому $[z_j,[a,x_1],x_2]=-[a,x_1,z_j,x_2]\in I$ для любых j. Отсюда следует, что $S_1\in I$.

С другой стороны, согласно следствию 2

$$\Big[z_j, [a, x_1]\Big] z_{j+1} \dots z_{j'-1} [z_{j'}, x_2] + [z_j, x_2] z_{j+1} \dots z_{j'-1} \Big[z_{j'}, [a, x_1]\Big] =$$
$$= [a, x_1, z_j] z_{j+1} \dots z_{j'-1} [x_2, z_{j'}] + [x_2, z_j] z_{j+1} \dots z_{j'-1} [a, x_1, z_{j'}] \equiv$$
$$\equiv z_{j+1} \dots z_{j'-1} [x_2, z_{j'}][a, x_1, z_j] + [x_2, z_j][a, x_1, z_{j'}] z_{j+1} \dots z_{j'-1} \pmod{I} \equiv$$
$$\equiv \Big([x_2, z_{j'}][a, x_1, z_j] + [x_2, z_j][a, x_1, z_{j'}]\Big) z_{j+1} \dots z_{j'-1} \pmod{I}.$$

Так как по лемме 5, п. 2 выполнено $[x_2, z_{j'}][a, x_1, z_j] + [x_2, z_j][a, x_1, z_{j'}] \in I$, то

$$\Big[z_j, [a, x_1]\Big] z_{j+1} \dots z_{j'-1} [z_{j'}, x_2] + [z_j, x_2] z_{j+1} \dots z_{j'-1} \Big[z_{j'}, [a, x_1]\Big] \in I$$

для любых j, j'. Отсюда следует, что $S_2 \in I$.

Таким образом, $[a, x_1, b, x_2] = -(S_1 + S_2) \in I$, что и требовалось доказать. Теорема 2 доказана.

Заключение

Для идеалов $T^{(n)}(A)$ свободных ассоциативных алгебр $A = R\langle X\rangle$ актуальной задачей является отыскание минимального, или близкого к нему, порождающего множества, которое, в частности, было бы конечным, если множество X конечно. Для доказательства того, что такое близкое к минимальному порождающее множество действительно порождает $T^{(n)}$ существует метод, состоящий в доказательстве совместной индукцией определенных утверждений для ряда семейств многочленов: двух семейств для $n = 3$ [14], пяти семейств для $n = 4$ [4] и восьми семейств для $n = 5$ [20]. В то же время для $n = 3$ тот факт, что известное близкое к минимальному порождающее множество действительно порождает $T^{(3)}$, может быть доказан непосредственными вычислениями [13] с использованием различных упрощений и это доказательство оказывается проще, чем доказательство с использованием совместной индукции. Настоящая работа показывает, что при $n = 4$ доказательство с помощью непосредственных вычислений все еще оказывается проще, чем доказательство методом совместной индукции, однако это преимущество гораздо меньше, чем при $n = 3$. Следует ожидать, что при $n \geq 5$ доказательство того, что близкое к минимальному порождающее множество действительно порождает идеал $T^{(n)}$, с помощью упрощений и непосредственных вычислений также будет несколько проще, чем доказательство методом совместной индукции, но не позволит полностью отказаться от индукции.

Список литературы

1. Jennings S.A. On rings whose associated Lie rings are nilpotent // Bulletin of the American Mathematical Society. 1947. Vol. 53. P. 593–597. DOI: 10.1090/S0002-9904-1947-08844-3

2. Levin F., Sehgal S. On Lie nilpotent group rings // Journal of Pure and Applied Algebra. 1985. Vol. 37. P. 33–39. DOI: 10.1016/0022-4049(85)90085-4

3. Красильников А.Н. О полугрупповой и лиевской нильпотентности ассоциативных алгебр // Математические заметки. 1997. Т. 62, № 4. С. 510–519. DOI: 10.4213/mzm1634

4. Deryabina G., Krasilnikov A. The torsion subgroup of the additive group of a Lie nilpotent associative ring of class 3 // Journal of Algebra. 2015. Vol. 428. P. 230–255. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2015.01.009

5. Kanel-Belov A., Karasik Ya., Rowen L.H. Computational Aspects of Polynomial Identities. Vol. 1. Kemer's Theorems. Boca Raton–London–New York: CRC Press, 2016. 408 p.

6. Гришин А.В., Пчелинцев С.В. О центрах относительно свободных ассоциативных алгебр с тождеством лиевой нильпотентности // Математический сборник. 2015. Т. 206, № 11. С. 113–130. DOI: 10.4213/sm8474

7. Киреева Е.А. О квантовой лиевской нильпотентности ступени 2 // Математика и математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2016. № 3. С. 10–17. DOI: 10.7463/mathm.0316.0846913

8. Feigin B., Shoikhet B. On $[A, A]/[A, A, A]$ and on a W_n-action on the consecutive commutators of free associative algebras // Mathematical Research Letters. 2007. Vol. 14, no. 5. P. 781–795. DOI: 10.4310/MRL.2007.v14.n5.a7

9. Abughazalah N., Etingof P. On properties of the lower central series of associative algebras // Journal of Algebra and its Applications. 2016. Vol. 15, iss. 10. Art. no. 1650187 (24 pages). DOI: 10.1142/S0219498816501875

10. Bhupatiraju S., Etingof P., Jordan D., Kuszmaul W., Li J. Lower central series of a free associative algebra over the integers and finite fields // Journal of Algebra. 2012. Vol. 372. P. 251–274. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2012.07.052

11. Jordan D., Orem H. An algebro-geometric construction of lower central series of associative algebras // International Mathematics Research Notices. 2015. Vol. 2015, no. 15. P. 6330–6352. DOI: 10.1093/imrn/rnu125

12. Deryabina G., Krasilnikov A. Products of commutators in a Lie nilpotent associative algebra // Journal of Algebra. 2017. Vol. 469. P. 84–95. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2016.08.031

13. Латышев В.Н. О выборе базы в одном Т-идеале // Сибирский математический журнал. 1963. Т. 4, № 5. С. 1122–1127.

14. Gupta C.K., Krasil'nikov A.N. A solution of a problem of Plotkin and Vovsi and an application to varieties of groups // Journal of the Australian Mathematical Society (Series A). 1999. Vol. 67, iss. 3. P. 329–355. DOI: 10.1017/S1446788700002056

15. Giambruno A., Koshlukov P. On the identities of the Grassmann algebra in characteristic $p > 0$ // Israel Journal of Mathematics. 2001. Vol. 122, iss. 1. P. 305–316. DOI: 10.1007/BF02809905

16. Воличенко И.Б. Т-идеал, порожденный элементом $[x_1, x_2, x_3, x_4]$. Минск: Ин-т матем. АН БССР, 1978. 13 с. (Препринт № 22).

17. Гордиенко А.С. Коразмерности коммутатора длины 4 // Успехи математических наук. 2007. Т. 62, вып. 1. С. 191–192. DOI: 10.4213/rm5696

18. Etingof P., Kim J., Ma X. On universal Lie nilpotent associative algebras // Journal of Algebra. 2009. Vol. 321. P. 697–703. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2008.09.042

19. Krasilnikov A. The additive group of a Lie nilpotent associative ring // Journal of Algebra. 2013. Vol. 392. P. 10–22. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2013.06.021

20. da Costa E.A., Krasilnikov A. Relations in universal Lie nilpotent associative algebras of class 4 // arXiv:1306.4294 [math.RA].

Mathematics & Mathematical Modelling
Electronic journal of the Bauman MSTU
http://mathm.elpub.ru

Mathematics and Mathematical Modelling of the Bauman MSTU, 2016, no. 6, pp. 15–29.
DOI: **10.24108/mathm.0616.0855437**
Received: 28.12.2016

On relations of the universal Lie nilpotent associative algebras of class 3

Deryabina G. S[1]
*galina_deryabina@mail.ru
[1]Bauman Moscow State Technical University, Russia

Keywords: free algebras, ideals generated by commutators, a generating set of an ideal

Let R be a unital associative and commutative ring and let A be a unital associative R-algebra. For arbitrary elements $d_i \in A$, $i = 1, \dots, n$, define a left-normed commutator $[d_1, d_2, \dots, d_n]$ recursively, supposing that $[d_1, d_2] = d_1 d_2 - d_2 d_1$, $[d1, \dots, d_{n-1}, d_n] = [[d_1, \dots, d_{n-1}], d_n]$, $n > 2$. For any $n > 1$, let $T^{(n)}(A)$ denote the two-sided ideal in A generated by all commutators $[d_1, d_2, \dots, d_n]$ for all $d_i \in A$. Recall that an algebra A is called Lie nilpotent of class at most $n-1$ if $T^{(n)}(A) = 0$.

Now let $A = R\langle X \rangle$ be the free unital associative R-algebra on a non-empty set X of free generators and let $T^{(n)} = T^{(n)}(A)$. The quotient algebra $A/T^{(n)}$ is the universal (or, in another terminology, the relatively free) unital associative R-algebra of Lie nilpotent of class $n-1$ generated by a set X. Such universal algebras and their similar algebras have been intensively studying during the last decade. For their study, information about the relationships between generators of these universal algebras is of importance.

Let Z be the ring of integers. The torsion part of the additive group of $Z\langle X \rangle / T^{(4)}$ has been explicitly described in [4]. This description is based on the following result:

Let R be an arbitrary unital associative and commutative ring. Then $T^{(4)}$ is generated as a two-sided ideal in A by the polynomials

(1) $[Y_1, Y_2, Y_3, Y_4]$;

(2) $[Y_1, Y_2, Y_3][Y_4, Y_5, Y_6]$;

(3) $[Y_1, Y_2][Y_3, Y_4, Y_5] + [Y_1, Y_5][Y_3, Y_4, Y_2]$;

(4) $[Y_1, Y_2][Y_3, Y_4, Y_5] + [Y_1, Y_4][Y_3, Y_2, Y_5]$;

(5) $([Y_1, Y_2][Y_3, Y_4] + [Y_1, Y_3][Y_2, Y_4])[Y_5, Y_6]$,

where, for all i, Y_i belongs to X.

Let I be the two-sided ideal in A generated by all polynomials (1)–(5). It has been proved in [4] that $I = T^{(4)}$, that is,

(i) I is contained in $T^{(4)}$;

(ii) $T^{(4)}$ is contained in I.

The proof of the item (ii) in [4] is based on a relatively sophisticated simultaneous induction according to degree of non-commutative polynomials that belong to five certain families. The aim of the present article is to give a new proof of (ii) that is simpler than that of given in [4]. In our proof we make use of various simplifications and straightforward calculations and do not use induction. More precisely, we prove that the ideal $T^{(4)}$ is generated (as a two-sided ideal in A) by the commutators of the form $[a, Y_1, b, Y_2]$ where Y_1, Y_2 are elements of X and a, b are products of elements of X. Then we check that the commutators of such a form belong to I, therefore $T^{(4)}$ is contained in I.

References

1. Jennings S.A. On rings whose associated Lie rings are nilpotent. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1947, vol. 53, pp. 593–597. DOI: 10.1090/S0002-9904-1947-08844-3
2. Levin F., Sehgal S. On Lie nilpotent group rings. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 1985, vol. 37, pp. 33–39. DOI: 10.1016/0022-4049(85)90085-4
3. Krasil'nikov A.N. On the semigroup nilpotency and the Lie nilpotency of associative algebras. *Matematicheskie zametki*, 1997, vol. 62, no. 4, pp. 510–519. DOI: 10.4213/mzm1634 (English version of journal: *Mathematical Notes*, 1997, vol. 62, pp. 426–433. DOI: 10.1007/BF02358975)
4. Deryabina G., Krasilnikov A. The torsion subgroup of the additive group of a Lie nilpotent associative ring of class 3. *Journal of Algebra*, 2015, vol. 428, pp. 230–255. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2015.01.009
5. Kanel-Belov A., Karasik Ya., Rowen L.H. *Computational Aspects of Polynomial Identities. Vol. l. Kemer's Theorems*. Boca Raton-London-New York, CRC Press, 2016. 408 p.
6. Grishin A.V., Pchelintsev S.V. On centres of relatively free associative algebras with a Lie nilpotency identity. *Matematicheskij sbornik*, 2015, vol. 206, no. 11, pp. 113–130. DOI: 10.4213/sm8474 (English version of journal: *Sbornik: Mathematics*, 2015, vol. 206, no. 11, pp. 1610–1627. DOI: 10.1070/SM2015v206n11ABEH004506)
7. Kireeva E.A. On Quantum Lie Nilpotency of Order 2. *Matematika i matematicheskoe modelirovanie MGTU im. N.E. Baumana = Mathematics and Mathematical Modelling of the Bauman MSTU*, 2016, no. 3, pp. 10–17. DOI: 10.7463/mathm.0316.0846913 [In Russian]
8. Feigin B., Shoikhet B. On $[A, A]/[A, A, A]$ and on a W_n-action on the consecutive commutators of free associative algebras. *Mathematical Research Letters*, 2007, vol. 14, no. 5, pp. 781–795. DOI: 10.4310/MRL.2007.v14.n5.a7

9. Abughazalah N., Etingof P. On properties of the lower central series of associative algebras. *Journal of Algebra and its Applications*, 2016, vol. 15, iss. 10, art. no. 1650187 (24 pages). DOI: 10.1142/S0219498816501875
10. Bhupatiraju S., Etingof P., Jordan D., Kuszmaul W., Li J. Lower central series of a free associative algebra over the integers and finite fields. *Journal of Algebra*, 2012, vol. 372, pp. 251–274. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2012.07.052
11. Jordan D., Orem H. An algebro-geometric construction of lower central series of associative algebras. *International Mathematics Research Notices*, 2015, vol. 2015, no. 15, pp. 6330–6352. DOI: 10.1093/imrn/rnu125
12. Deryabina G., Krasilnikov A. Products of commutators in a Lie nilpotent associative algebra. *Journal of Algebra*, 2017, vol. 469, pp. 84–95. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2016.08.031
13. Latyshev V.N. On the choise of basis in a T-ideal. *Sibirskij matematicheskij zhurnal = Siberian Mathematical Journal*, 1963, vol. 4, pp. 1122–1127. [In Russian]
14. Gupta C.K., Krasil'nikov A.N. A solution of a problem of Plotkin and Vovsi and an application to varieties of groups. *Journal of the Australian Mathematical Society (Series A)*, 1999, vol. 67, iss. 3, pp. 329–355. DOI: 10.1017/S1446788700002056
15. Giambruno A., Koshlukov P. On the identities of the Grassmann algebra in characteristic $p > 0$. *Israel Journal of Mathematics*, 2001, vol. 122, iss. 1, pp. 305–316. DOI: 10.1007/BF02809905
16. Volichenko I.B. *T-ideal, porozhdennyj elementom* $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ [The T-ideal generated by the element $[x_1, x_2, x_3, x_4]$]. Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Belorussian SSR, Minsk, 1978, 13 p. (Preprint 22) [In Russian]
17. Gordienko A.S. Codimensions of commutators of length 4. *Uspechi matematicheskich nauk*, 2007, vol. 62, no. 1, pp. 191–192. DOI: 10.4213/rm5696 (English version of journal: *Russian Mathematical Surveys*, 2007, vol. 62, no. 1, pp. 187–188. DOI: 10.1070/RM2007v062n01ABEH004383
18. Etingof P., Kim J., Ma X. On universal Lie nilpotent associative algebras. *Journal of Algebra*, 2009, vol. 321, pp. 697–703. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2008.09.042
19. Krasilnikov A. The additive group of a Lie nilpotent associative ring. *Journal of Algebra*, 2013, vol. 392, pp. 10–22. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2013.06.021
20. da Costa E.A., Krasilnikov A. Relations in universal Lie nilpotent associative algebras of class 4. arXiv:1306.4294 [math.RA].