

УДК 536.2

## Температурное состояние пластины с зависящими от температуры теплопроводностью и энерговыделением

Зарубин В. С.<sup>1,\*</sup>, Котович А. В.<sup>1</sup>, Кувыркин Г. Н.<sup>1</sup>

\* [fn2@bmstu.ru](mailto:fn2@bmstu.ru)

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

---

На основе сформулированной нелинейной математической модели теплопроводности в пластине с зависящими от температуры коэффициентом теплопроводности материала пластины и объемной мощностью энерговыделения в аналитической форме представлено решение ряда конкретных задач, что позволяет выявить некоторые существенные эффекты, влияющие на температурное состояние пластины. Рассмотрены различные варианты зависимости объемной мощности энерговыделения от температуры. В частности, установлены условия, при которых в пластине невозможно существование установившегося распределения температуры, что соответствует явлению теплового взрыва. Полученные результаты могут быть использованы при тестировании компьютерных программ, используемых для численного решения нелинейных задач теплопроводности применительно к техническим устройствам, в объеме элементов которых происходит выделение или поглощение тепловой энергии

**Ключевые слова:** пластина; тепловой взрыв; температурное состояние; объемная мощность энерговыделения

---

### Введение

Температурное состояние твердого тела помимо условий его теплообмена с окружающей средой может существенно зависеть от процессов тепловыделения (или теплопоглощения) в объеме тела. Среди возможных причин возникновения таких процессов следует отметить выделение энергии в тепловыделяющих элементах ядерных реакторов, протекание в материале твердого тела экзотермических или эндотермических химических реакций, сопровождаемых соответственно выделением или поглощением теплоты, переход в теплоту части электрической энергии при прохождении электрического тока через проводники (так называемая джоулева теплота) или энергии излучения, проникающего в тело из полупрозрачного материала, и т.п. Интенсивность этих процессов характеризуют объемной мощностью энерговыделения  $q_V$ , основной единицей измерения которой является  $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$ . При поглощении теплоты в теле значение  $q_V$  является отрицательным.

В обширной литературе по теории теплопроводности твердых тел [1, 2, 3] приведены решения задач по определению стационарного (установившегося во времени) и нестационарного температурного состояния твердых тел (как правило, канонической формы), в которых действуют источники объемного энерговыделения. При этом в общем случае учитывается возможность изменения величины  $q_V$  по объему тела, а при решении нестационарных задач и возможная зависимость этой величины от времени.

Однако в реальных условиях величина  $q_V$  часто зависит и от локального значения температуры, причем такая зависимость может быть нелинейной. Например, интенсивность выделения или поглощения теплоты при химических реакциях пропорционально скорости их протекания, которая, в свою очередь, чувствительна к значению температуры, причем зависимость от температуры имеет экспоненциальный характер [4]. Дополнительным фактором, усложняющим в таких случаях анализ температурного состояния твердого тела, является зависимость от температуры и коэффициента теплопроводности материала этого тела, особенно в случае существенной неоднородности распределения в нем температуры. Учет влияния перечисленных факторов приводит к необходимости использовать методы математического моделирования [5, 6, 7], позволяющие построить адекватную нелинейную математическую модель процесса теплопроводности в теле с объемным энерговыделением. Количественный анализ таких моделей требует, как правило, применения численных методов.

Вместе с тем для такой простой формы тела, какой является неограниченная пластина постоянной толщины, возможно при определенных допущениях получить в аналитическом виде решение нелинейной задачи теплопроводности, учитывающее зависимости от температуры коэффициента теплопроводности материала пластины и интенсивности энерговыделения. Такое решение позволяет выявить ряд существенных эффектов, влияющих на температурное состояние пластины, в том числе связанных с условиями существования установившегося распределения температуры, и может быть использовано для тестирования результатов, получаемых при помощи численных методов.

## 1. Основные соотношения

При действии в неограниченной пластине толщиной  $h$  внутренних источников (или стоков) тепловой энергии с объемной мощностью  $q_V(z, T)$ , зависящей в общем случае как от координаты  $z$ , отсчитываемой по нормали к поверхности пластины, так и от температуры  $T$ , одномерное распределение  $T(z)$  температуры должно удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dz} \left( \lambda(T, z) \frac{dT(z)}{dz} \right) + q_V(z, T) = 0, \quad (1)$$

где  $\lambda(z, T)$  — коэффициент теплопроводности материала тела. В частном случае зависимости величины  $q_V$  лишь от координаты можно найти первый интеграл этого уравнения в

виде

$$\lambda(T, z) \frac{dT(z)}{dz} + q_0 + \int_0^z q_V(z) dz = 0, \quad (2)$$

включающий постоянную  $q_0$ , равную плотности теплового потока, поступающего в пластину через ее поверхность, от которой происходит отсчет координаты  $z$ .

Если для неоднородного тела коэффициент теплопроводности не зависит от температуры, но изменяется с изменением координаты  $z$ , то интегрирование равенства (2) приводит к соотношению

$$T(z) = T(0) - \int_0^z \frac{dz'}{\lambda(z')} \left( q_0 + \int_0^{z'} q_V(\zeta) d\zeta \right) \quad (3)$$

Отсюда при  $z = h$  следует

$$q_0 = \frac{T(0) - T(h) - \int_0^h \frac{dz}{\lambda(z)} \int_0^z q_V(z') dz'}{\int_0^h \frac{dz}{\lambda(z)}}. \quad (4)$$

Для однородного тела, когда коэффициент теплопроводности зависит лишь от температуры, после интегрирования равенства (2) получим

$$\int_{T(0)}^{T(z)} \lambda(T) dT = - \int_0^z dz' \left( q_0 + \int_0^{z'} q_V(\zeta) d\zeta \right), \quad (5)$$

$$q_0 h = \int_{T(0)}^{T(z)} \lambda(T) dT - \int_0^h dz \int_0^z q_V(z') dz'. \quad (6)$$

При граничных условиях первого рода по заданным значениям  $T(0) = T_0$  и  $T(h) = T_h$  из формул (3) или (5) можно найти значение  $q_0$  и затем использовать это значение для расчета распределения температуры при помощи соотношений (4) или (6). Если граничные условия заданы в виде

$$-\lambda(T(0)) \frac{dT}{dz} \Big|_{x=0} + f_0(T(0)) = 0, \quad \lambda(T(h)) \frac{dT}{dz} \Big|_{x=h} + f_h(T(h)) = 0,$$

то значение  $q_0$  и неизвестные температуры  $T(0)$  и  $T(h)$  следует искать с учетом формул (4) или (6) из цепочки равенств

$$q_0 = -f_0(T(0)) = f_h(T(h)) - \int_0^h q_V(z) dz.$$

В частном случае идеальной теплоизоляции поверхности пластины при  $z = 0$  имеем  $q_0 = 0$  и температуру  $T(h)$  можно определить из равенства нулю правой части последнего соотношения, а затем по формуле

$$T(0) = T(h) + \int_0^h \frac{dz}{\lambda(z)} \int_0^z q_V(z') dz'$$

или

$$\int_{T(h)}^{T(0)} \lambda(T) dT = \int_0^h dz \int_0^z q_V(z') dz'$$

вычислить температуру  $T(0)$ , что в итоге позволяет из соотношений (3) или (5) при  $q_0 = 0$  найти искомое распределение  $T(z)$  температуры. В случае постоянных величин  $\lambda$  и  $q_V$  из последних формул следует  $T(0) - T(h) = q_V h^2 / (2\lambda)$ .

## 2. Зависимость энерговыделения от температуры

Если величина  $q_V$  зависит от температуры и не зависит от координаты  $z$ , то подстановкой  $p = \lambda(T) \frac{dT(z)}{dz}$  уравнение (1) можно привести к виду  $p \frac{dp}{dT} + q_V(T) \lambda(T) = 0$  и после интегрирования записать

$$p^2 = C_1 - 2 \int_{T_*}^T q_V(T') \lambda(T) dT,$$

где  $C_1$  — постоянная интегрирования, а значение  $T_*$  может быть выбрано произвольно. Из этого равенства следует обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\lambda(T) \frac{dT}{dz} = \pm \left( C_1 - 2 \int_{T_*}^T q_V(T') \lambda(T) dT \right)^{1/2}. \quad (7)$$

Выбор знака в правой части зависит от направления теплового потока в пластине.

Интегрированием уравнения (7) получим

$$z = C_2 \pm \int_{T_*}^{T(z)} \lambda(T) \left( C_1 - 2 \int_{T_*}^T q_V(T') \lambda(T) dT \right)^{-1/2} dT. \quad (8)$$

В случае задания на поверхностях стенки граничных условий первого рода целесообразно принять  $T_* = T_h$ , что приводит к равенству  $C_2 = h$ . Тогда постоянную  $C_1$  можно найти из условия  $T(z) = T_0$  при  $z = 0$ , равносильного равенству

$$h \pm \int_{T_h}^{T_0} \lambda(T) \left( C_1 - 2 \int_{T_h}^T q_V(T') \lambda(T') dT' \right)^{-1/2} dT = 0. \quad (9)$$

Ясно, что при произвольных зависимостях  $q_V$  и  $\lambda$  от  $T$  для поиска значения  $C_1$  необходимо использовать последовательные приближения.

Если при заданной температуре  $T(h) = T_h$  поверхность пластины при  $z = 0$  идеально теплоизолирована, то из формулы (7) с учетом выбора  $T_* = T_h$  следует

$$C_1 = 2 \int_{T_h}^{T_0} q_V(T') \lambda(T) dT,$$

а вместо равенства (9) получим уравнение

$$h = \pm \int_{T_h}^{T(0)} \lambda(T) \left( 2 \int_T^{T(0)} q_V(T') \lambda(T') dT' \right)^{-1/2} dT \quad (10)$$

для определения температуры  $T(0)$ , решение которого в общем случае также возможно лишь путем последовательных приближений. Уравнение (10) имеет смысл при положительном значении внутреннего интеграла, т.е. при  $q_V(T) > 0$  должно быть  $T(0) > T_h$  и перед внешним интегралом следует выбрать знак плюс, а при  $q_V(T) < 0$ , наоборот,  $T(0) < T_h$  и перед этим интегралом необходимо выбрать знак минус.

Положим  $q_V(T) > 0$  и используем в уравнении (10) подстановку  $d\psi = \lambda(T) dT$ , приняв

$$\psi(0) = \int_{T_h}^{T(0)} \lambda(T) dT.$$

Тогда уравнение (10) примет вид

$$h = \int_0^{\psi(0)} \left( 2 \int_{\psi}^{\psi(0)} \bar{q}_V(\psi') d\psi' \right)^{-1/2} d\psi, \quad (11)$$

где  $\bar{q}_V(\psi)$  — зависимость объемной мощности энерговыделения от  $\psi$ , получаемая переходом в функции  $q_V(T)$  от температуры к функции  $\psi$  в соответствии с подстановкой

$$\psi = \int_{T_h}^T \lambda(T) dT.$$

Представим эту зависимость в виде ряда Маклорена [8]

$$\bar{q}(\psi) = \bar{q}(0) + \left. \frac{d\bar{q}(\psi)}{d\psi} \right|_{\psi=0} \psi + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\bar{q}(\psi)}{d\psi^2} \right|_{\psi=0} \psi^2 + \dots \quad (12)$$

Если ограничиться двумя первыми членами ряда (12), то после подстановки в уравнение (11) и интегрирования получим

$$\psi(0) = \bar{q}_V(0) h^2 \frac{\sec \sqrt{A} - 1}{A}, \quad (13)$$

где  $A = h^2 \left. \frac{d\bar{q}_V(\psi)}{d\psi} \right|_{\psi=0}$ . Очевидно, что при  $A \rightarrow \pi^2/4$  правая часть формулы (13) неограниченно возрастает, т.е. существование установившегося распределения температуры в пластине возможно лишь при условии

$$\left. \frac{d\bar{q}_V(\psi)}{d\psi} \right|_{\psi=0} < \frac{1}{4} \left( \frac{\pi}{h} \right)^2,$$

или

$$\left. \frac{dq_V(T)}{dT} \right|_{T=T_h} < \lambda(T_h) \frac{\pi^2}{4h^2}. \quad (14)$$

При более высоком темпе возрастания объемной мощности энерговыделения с увеличением температуры существование установившегося распределения температуры в пластине невозможно. В этом случае малые приращения температуры вызывают рост выделения тепловой энергии, которое уже не может быть отведено к поверхности пластины с температурой  $T_h$  путем теплопроводности без дальнейшего роста температуры. В итоге температура в пластине неограниченно возрастает, что соответствует явлению теплового взрыва. Для тел простой формы условия теплового взрыва исследованы в работе [4].

При выполнении условия (14) и использовании первых двух членов ряда (12) для рассматриваемой пластины с одной идеально теплоизолированной поверхностью из соотношения (8) следует

$$\psi(z) = \int_{T_h}^{T(z)} \lambda(T) dT = \frac{q_V(T_h)h^2}{A} \left( \frac{\cos \frac{\sqrt{A}z}{h}}{\cos \sqrt{A}} - 1 \right). \quad (15)$$

Отсюда как частный случай при  $A = 0$  предельным переходом можно получить формулу

$$\psi(z) = \frac{1}{2} q_V(T_h) h^2 \left( 1 - \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right),$$

которая при  $\lambda = \text{const}$  и  $q_V = \text{const}$  переходит в известное равенство [9]

$$T(z) = T_h + \frac{q_V(h^2 - z^2)}{2\lambda}.$$

В случае  $A < 0$  аргумент косинусов в соотношении (15) будет чисто мнимым и их следует заменить гиперболическими косинусами, записав

$$\psi(z) = \frac{q_V(T_h)h^2}{A} \left( 1 - \frac{\text{ch} \frac{\sqrt{|A|}z}{h}}{\text{ch} \sqrt{|A|}} \right).$$

### 3. Экспоненциальная зависимость энерговыделения от температуры

Энерговыделение в пластине может быть вызвано протекающими в ее материале химическими реакциями, скорость которых описывает закон Аррениуса [4]. В этом случае зависимость объемной мощности энерговыделения от температуры можно представить в виде

$$q_V(T) = q_V^\circ \exp\left(-\frac{U}{k_0 T}\right),$$

где  $q_V^\circ$  — предэкспоненциальный множитель;  $U$  — энергия активации химической реакции;  $k_0 \approx 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$  — постоянная Больцмана. При  $q_V^\circ > 0$  реакция является экзотермической, а при  $q_V^\circ < 0$  — эндотермической.

Если для пластины с постоянным коэффициентом теплопроводности  $\lambda$ , идеально теплоизолированной поверхностью при  $z = 0$  и заданной температурой  $T_h$  на поверхности при  $z = h$  допустимо принять  $T(z)/T_h - 1 \ll 1$ , то дифференциальное уравнение (1), описывающее распределение температуры в такой пластине, можно привести к виду

$$\frac{d^2\Theta(\zeta)}{d\zeta^2} + \beta \exp(\Theta(\zeta)) = 0, \quad (16)$$

где

$$\zeta = \frac{z}{h}, \quad \Theta(\zeta) = \frac{T(z) - T_h}{\gamma T_h}, \quad \gamma = \frac{k_0 T_h}{U}, \quad \beta = \frac{q_V^\circ h^2}{\gamma \lambda T_h} \exp\left(-\frac{1}{\gamma}\right).$$

Обозначив  $\frac{d\Theta(z)}{dz} = Y$ , преобразуем уравнение (16) к виду  $Y \frac{dY}{d\Theta} + \beta \exp(\Theta) = 0$  и после интегрирования получим  $Y^2 = D_1 - 2\beta \exp(\Theta)$ , или

$$\frac{d\Theta(z)}{d\zeta} = \pm \sqrt{D_1 - 2\beta \exp(\Theta(\zeta))}, \quad (17)$$

где  $D_1$  — постоянная интегрирования. При  $q_V^\circ > 0$  ( $\beta > 0$ ) направление теплового потока в данной пластине совпадает с направлением оси  $Oz$ . Поэтому в правой части равенства (17) следует выбрать знак минус. Из условия  $\frac{d\Theta}{d\zeta} = 0$  при  $\zeta = 0$  из этого равенства находим  $D_1 = 2\beta \exp(\Theta(0))$ . В итоге интегрирование уравнения (17) с использованием граничного условия  $\Theta(1) = 0$  приводит к соотношению

$$\sqrt{\frac{2}{X_0}} \left( \text{Arth} \sqrt{1 - \frac{1}{X_0}} - \text{Arth} \sqrt{1 - \frac{X}{X_0}} \right) = \sqrt{\beta}(1 - \zeta), \quad (18)$$

где  $X = \exp(\Theta(\zeta))$  и  $X_0 = \exp(\Theta(0))$ .

Для определения неизвестного значения  $X_0$  из соотношения (18) при  $\zeta = 0$  получаем трансцендентное уравнение

$$\sqrt{\frac{2}{X_0}} \text{Arth} \sqrt{1 - \frac{1}{X_0}} = \sqrt{\beta}, \quad (19)$$

график зависимости  $W(X_0)$  левой части которого от  $X_0$  представлен на рис. 1 (для сплошной кривой шкалы осей абсцисс и ординат расположены соответственно сверху и слева, а для штриховой — снизу и справа). Из этого графика и уравнения (19) следует, что существует

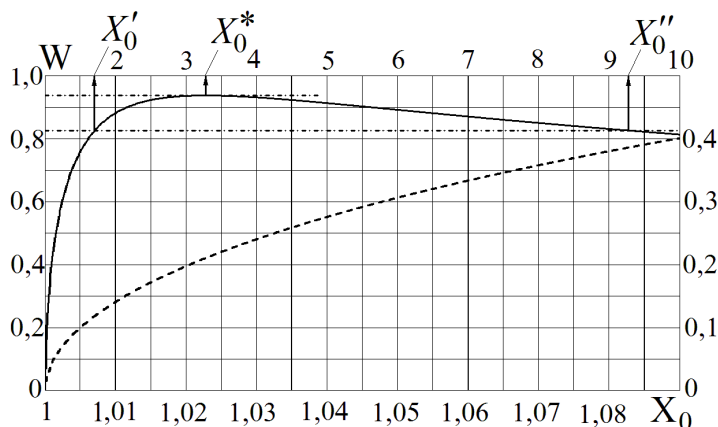


Рис. 1. График зависимости левой части уравнения (19) от  $X_0$

наибольшее значение  $\beta^* \approx 0,878$  этого параметра, равное квадрату значения ординаты горизонтальной касательной к графику. Значения  $\beta > \beta^*$  соответствуют тепловому взрыву в рассматриваемой пластине, а при  $0 \leq \beta \leq \beta^*$  в пластине может существовать установившееся распределение температуры, описываемое соотношением (18). При этом каждому значению  $\beta^0 < \beta^*$  формально отвечают два значения  $X_0'$  и  $X_0''$ , из которых может быть реализовано лишь меньшее. Предельно возможное значение  $X_0^* \approx 3,274$ , равное абсциссе точки касания горизонтальной касательной к графику зависимости  $W(X_0)$ , соответствует значению  $\Theta^*(0) \approx 1,186$ .

При  $q_V^0 < 0$  ( $\beta < 0$ ) направление теплового потока в пластине противоположно направлению координатной оси  $Oz$ . В этом случае направление теплового потока в пластине противоположно направлению координатной оси  $Oz$ . Поэтому в правой части равенства (17) следует выбрать знак плюс и после интегрирования полученного дифференциального уравнения с учетом граничного условия  $\Theta(1) = 0$  записать

$$\sqrt{\frac{2}{X_0}} \left( \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{X_0} - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{X}{X_0} - 1} \right) = \sqrt{|\beta|} (1 - \zeta). \quad (20)$$

Для нахождения неизвестного значения  $X_0$  из равенства (20) при  $\zeta = 0$  получим трансцендентное уравнение

$$\sqrt{\frac{2}{X_0}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{X_0} - 1} = \sqrt{|\beta|}, \quad (21)$$

график зависимости  $W_1(X_0)$  левой части которого от  $X_0$  приведен на рис. 2 (для сплошной кривой шкалы осей абсцисс и ординат расположены соответственно сверху и справа, а для штриховой — снизу и слева). Этот график по известному значению  $|\beta|$  позволяет определить единственное значение  $X_0 < 1$ , что дает возможность по формуле (18) построить распределение температуры в пластине. При этом следует отметить, что в силу отрицательности значения  $\Theta(0)$  температура  $T(0)$  на теплоизолированной поверхности пластины будет меньше температуры  $T_h$ .

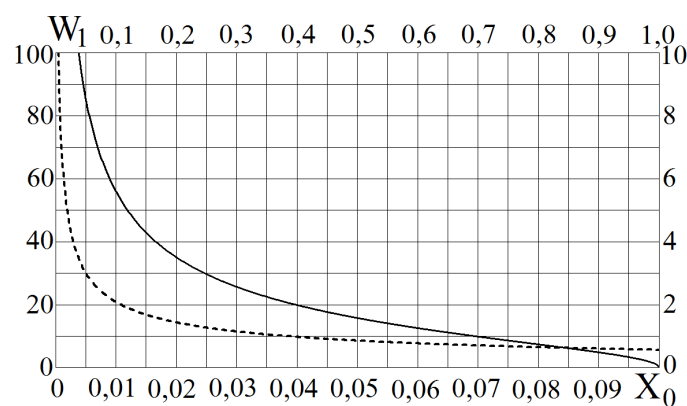


Рис. 2. График зависимости левой части уравнения (21) от  $X_0$



## Заключение

На основе сформулированной нелинейной математической модели теплопроводности в пластине с зависящими (в общем случае) от температуры коэффициентом теплопроводности материала пластины и объемной мощностью энерговыделения в аналитической форме решен ряд конкретных задач, что позволяет выявить некоторые существенные эффекты, влияющие на температурное состояние пластины. В частности, установлены условия, при которых в пластине не может существовать установившееся распределение температуры. Полученные результаты могут быть использованы при тестировании компьютерных программ, используемых для численного решения нелинейных задач теплопроводности.

Работа выполнена в рамках проекта 1712 по государственному заданию 2014/104 Минобрнауки РФ и государственного задания по проекту 1.2640.2014.

## Список литературы

1. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел: пер. с англ. М.: Наука, 1964. 488 с.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
3. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.
4. Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1987. 491 с.
5. Зарубин В.С. Моделирование. М.: Издательский центр «Академия», 2013. 336 с.
6. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Особенности математического моделирования технических устройств // Математическое моделирование и численные методы. 2014. Т. 1, № 1(1). С. 5–17.
7. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математическое моделирование термомеханических процессов при интенсивном тепловом воздействии // Теплофизика высоких температур. 2003. Т. 41, № 2. С. 300–309.
8. Власова Е.А. Ряды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 616 с.
9. Теория тепломассообмена / Под ред. А.И. Леонтьева. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. 683 с.

## The Temperature Condition of the Plate with Temperature-Dependent Thermal Conductivity and Energy Release

Zarubin V. S.<sup>1,\*</sup>, Kotovich A. V.<sup>1</sup>, Kuvyrkin G. N.<sup>1</sup>

\* [fn2@bmstu.ru](mailto:fn2@bmstu.ru)

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Russia

---

**Keywords:** slice, thermal explosion, temperature state, the volume power of energy release

---

The temperature state of a solid body, in addition to the conditions of its heat exchange with the environment, can greatly depend on the heat release (or heat absorption) processes within the body volume. Among the possible causes of these processes should be noted such as a power release in the fuel elements of nuclear reactors, exothermic or endothermic chemical reactions in the solid body material, which respectively involve heat release or absorption, heat transfer of a part of the electric power in the current-carrying conductors (so-called Joule's heat) or the energy radiation penetrating into the body of a semitransparent material, etc. The volume power release characterizes an intensity of these processes.

The extensive list of references to the theory of heat conductivity of solids offers solutions to problems to determine a stationary (steady over time) and non-stationary temperature state of the solids (as a rule, of the canonical form), which act as the sources of volume power release. Thus, in general case, a possibility for changing power release according to the body volume and in solving the nonstationary problems also a possible dependence of this value on the time are taken into consideration.

However, in real conditions the volume power release often also depends on the local temperature, and such dependence can be nonlinear. For example, with chemical reactions the intensity of heat release or absorption is in proportion to their rate, which, in turn, is sensitive to the temperature value, and a dependence on the temperature is exponential. A further factor that in such cases makes the analysis of the solid temperature state complicated, is dependence on the temperature and the thermal conductivity of this body material, especially when temperature distribution therein is significantly non-uniform. Taking into account the influence of these factors requires the mathematical modeling methods, which allow us to build an adequate nonlinear mathematical model of the heat conductivity process in the volume power release body. Quantitative analysis of these models requires using the numerical methods, as a rule.

At the same time, such a simple body, which is an unlimited plate of the constant thickness allows us, under certain assumptions, to solve analatically a nonlinear heat conductivity problem taking into account the thermal conductivity of the plate material and the power release intensity versus temperature.

This solution enables us to reveal a number of significant effects that have impact on the thermal state of the plate, including those related to conditions of available steady temperature distribution, and it can be used to test the results obtained by numerical methods.

### References

1. Carslaw H.S., Jaeger J.C. *Conduction of Heat in Solids*. Oxford University Press, 1959. (Russ. ed.: Karslou G., Eger D. *Teploprovodnost' tverdykh tel*. Moscow, Nauka Publ., 1964. 488 p.).
2. Lykov A.V. *Teoriia teploprovodnosti* [Heat conducton theory]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1967. 600 p. (in Russian).
3. Kartashov E.M. *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel* [Analytical methods in heat conduction theory of solid bodies]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2001. 550 p. (in Russian).
4. Frank-Kamenetskii D.A. *Diffuziia i teploperedacha v khimicheskoi kinetike* [Diffusion and heat transfer in chemical cinetics]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 491 p. (in Russian).
5. Zarubin V.S. *Modelirovanie* [Modeling]. Moscow, Publishing Center "Academy", 2013. 336 p. (in Russian).
6. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Special features of mathematical modeling of technical instruments. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody = Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, vol. 1, no. 1(1), pp. 5–17. (in Russian).
7. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Mathematical modeling of thermomechanical processes under intense thermal effect. *Teplofizika vysokikh temperatur*, 2003, vol.41, no. 2, pp. 300–309. (in Russian). (English version of journal: *High Temperature*, 2003, vol. 41, no. 2, pp. 257–265. DOI: [10.1023/A:1023390021091](https://doi.org/10.1023/A:1023390021091))
8. Vlasova E.A. *Riady* [Series]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2006. 616 p. (in Russian).
9. Leont'ev A.I., ed. *Teoriia teplomassoobmena* [The theory of heat and mass transfer]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 1997. 683 p. (in Russian).