Математика и Математическое моделирование
Сетевое издание
МГТУ им. Н.Э. Баумана
http://mathmjournal.ru

Ссылка на статью:
// Математика и математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 6. С. 32–43.
DOI: **10.7463/mathm.0615.0823117**
Представлена в редакцию: 13.11.2015

УДК 517.977

Достаточное условие управляемости аффинных систем с двумерным управлением и двумерной нулевой динамикой

Фетисов Д. А.[1,*]

[*]dfetisov@yandex.ru

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Рассматривается проблема управляемости аффинных систем с двумерным управлением. Предполагается, что система гладкой невырожденной заменой переменных может быть преобразована к квазиканоническому виду с двумерной нулевой динамикой, определенному и регулярному на всем пространстве состояний. В этом случае управляемость исходной системы эквивалентна управляемости преобразованной системы. Для регулярной системы квазиканонического вида с двумерным управлением и двумерной нулевой динамикой доказано достаточное условие существования решения терминальной задачи. Получено достаточное условие управляемости для указанного класса систем. Приведен пример системы шестого порядка, управляемость которой доказывается с помощью предложенного условия.

Ключевые слова: управляемость; аффинная система; терминальная задача; квазиканонический вид

Введение

К проблеме исследования управляемости динамических систем приводят многие современные задачи науки и техники. Для линейных стационарных систем эта проблема хорошо изучена: известно [1] необходимое и достаточное условие управляемости, состоящее в равенстве размерности вектора состояния системы и ранга матрицы управляемости. Для аффинных систем, как и для линейных, введено понятие матрицы управляемости [2], но связь между свойствами этой матрицы и управляемостью системы сложнее. Известно [3], что если аффинная система линеаризуема обратной связью во всем пространстве состояний, то система управляема. Вместе с тем, примеры показывают [4], что аффинная система может быть управляемой и в случае, когда она не линеаризуема обратной связью ни на каком открытом подмножестве пространства состояний. Получены различные условия управляемости для нелинейных систем, часть из них можно найти в работах [5, 6, 7, 8]. Тем не менее проблема управляемости нелинейных систем остается открытой: большинство работ по данной тематике либо посвящены исследованию локальной управляемости, т.е. управляемости в некоторой окрестности заданной точки, либо в них рассматриваются специальные (зачастую очень узкие) классы систем. В данной работе изучается проблема управляемости аффинных систем с двумерным управлением, которые гладкой невырожденной заменой в пространстве состояний преобразуются к регулярному квазиканоническому виду [9] с двумерной нулевой динамикой. Для систем квазиканонического вида управляемость доказывается на основе проверки существования решений терминальных задач.

1. Преобразование аффинной системы к квазиканоническому виду

Рассмотрим аффинную систему с двумерным управлением

$$\dot{x} = F(x) + G_1(x)u_1 + G_2(x)u_2, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, u_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$, $F(x) = (F_1(x), \ldots, F_n(x))^{\mathrm{T}}$, $G_j(x) = (G_{1j}(x), \ldots, G_{nj}(x))^{\mathrm{T}}$, $F_i(x), G_{ij}(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $i = \overline{1,\, n}$, $j = 1,\, 2$, и терминальную задачу для нее, состоящую в нахождении таких непрерывных управлений $u_1(t)$, $u_2(t)$, что решение $x(t)$ задачи Коши

$$\dot{x} = F(x) + G_1(x)u_1(t) + G_2(x)u_2(t), \quad x(0) = x_0$$

определено на отрезке $[0,\ t_*]$ и удовлетворяет условию $x(t_*) = x_*$.

Будем предполагать, что система (1) гладкой невырожденной заменой переменных $z = \Phi(x)$ в $\mathbb{R}^n$ преобразуется к системе квазиканонического вида

$$\begin{cases} \dot{z}^i_1 = z^i_2, \quad \ldots, \quad \dot{z}^i_{r_i-1} = z^i_{r_i}, \\ \dot{z}^i_{r_i} = f_i(z^1, z^2, \eta) + g_{i1}(z^1, z^2, \eta)u_1 + g_{i2}(z^1, z^2, \eta)u_2, \quad i = 1,\, 2, \\ \dot{\eta}_1 = q_1(z^1, z^2, \eta), \quad \dot{\eta}_2 = q_2(z^1, z^2, \eta), \end{cases} \tag{2}$$

где

$$r_1 + r_2 = n - 2, \quad z^i = (z^i_1, \ldots, z^i_{r_i})^{\mathrm{T}}, \quad i = 1, 2, \quad z = ({z^1}^{\mathrm{T}}, {z^2}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n-2}, \quad \eta = (\eta_1, \eta_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2,$$
$$f_i(z^1, z^2, \eta),\ g_{i1}(z^1, z^2, \eta),\ g_{i2}(z^1, z^2, \eta),\ q_1(z^1, z^2, \eta),\ q_2(z^1, z^2, \eta) \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad i = 1,\, 2.$$

Условия, необходимые и достаточные для существования указанной замены переменных, приведены в работе [9]. Заметим, что размерность подсистемы нулевой динамики в системе (2) равна двум и совпадает с размерностью управления.

Будем далее предполагать, что система (2) регулярна в $\mathbb{R}^n$, т.е. матрица

$$g(z^1, z^2, \eta) = \begin{pmatrix} g_{11}(z^1, z^2, \eta) & g_{12}(z^1, z^2, \eta) \\ g_{21}(z^1, z^2, \eta) & g_{22}(z^1, z^2, \eta) \end{pmatrix}$$

невырождена при всех $(z, \eta) \in \mathbb{R}^n$.

Обозначим через (z_0, η_0) и (z_*, η_*) образы точек x_0 и x_* при отображении Φ:

$$\Phi(x_0) = (z_0, \eta_0), \quad \Phi(x_*) = (z_*, \eta_*), \tag{3}$$

где

$$z_0 = (z_{10}^1, \dots, z_{r_1,0}^1, z_{10}^2, \dots, z_{r_2,0}^2)^{\mathrm{T}}, \quad \eta_0 = (\eta_{10}, \eta_{20})^{\mathrm{T}},$$
$$z_* = (z_{1*}^1, \dots, z_{r_1,*}^1, z_{1*}^2, \dots, z_{r_2,*}^2)^{\mathrm{T}}, \quad \eta_* = (\eta_{1*}, \eta_{2*})^{\mathrm{T}}.$$

Тогда терминальная задача для системы (2), заключающаяся в нахождении таких непрерывных управлений $u_1(t)$, $u_2(t)$, что решение $z(t)$, $\eta(t)$ задачи Коши

$$\begin{aligned}
&\dot z_1^i = z_2^i, \quad \dots, \quad \dot z_{r_i-1}^i = z_{r_i}^i,\\
&\dot z_{r_i}^i = f_i(z^1, z^2, \eta) + g_{i1}(z^1, z^2, \eta) u_1(t) + g_{i2}(z^1, z^2, \eta) u_2(t), \quad i = 1,\ 2,\\
&\dot\eta_1 = q_1(z^1, z^2, \eta), \quad \dot\eta_2 = q_2(z^1, z^2, \eta),\\
&z(0) = z_0, \quad \eta(0) = \eta_0
\end{aligned}$$

определено на отрезке $[0,\ t_*]$ и удовлетворяет условию $z(t_*) = z_*$, $\eta(t_*) = \eta_*$, эквивалентна исходной терминальной задаче для системы (1). В связи с этим далее будем рассматривать терминальную задачу для системы (2) с граничными условиями (3).

2. Построение решения терминальной задачи для системы квазиканонического вида

Согласно теореме 2 из работы [10], существование решения терминальной задачи (3) для системы (2) равносильно существованию таких функций $B_i(t) \in C^{r_i}([0, t_*])$, $i = 1,\ 2$, что

$$B_i(0) = z_{10}^i, \quad \dots, \quad B_i^{(r_i-1)}(0) = z_{r_i0}^i, \quad B_i(t_*) = z_{1*}^i, \quad \dots, \quad B_i^{(r_i-1)}(t_*) = z_{r_i*}^i \tag{4}$$

и решение $\eta(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t))^{\mathrm{T}}$ задачи Коши

$$\begin{aligned}
&\dot\eta_1 = q_1(\overline{B}_1(t), \overline{B}_2(t), \eta), \quad \dot\eta_2 = q_2(\overline{B}_1(t), \overline{B}_2(t), \eta),\\
&\eta_1(0) = \eta_{10}, \quad \eta_2(0) = \eta_{20},
\end{aligned} \tag{5}$$

где $\overline{B}_i(t) = (B_i(t), \dots, B_i^{(r_i-1)}(t))^{\mathrm{T}}$, $i = 1,\ 2$, определено на отрезке $[0,\ t_*]$ и удовлетворяет условиям

$$\eta_1(t_*) = \eta_{1*}, \quad \eta_2(t_*) = \eta_{2*}. \tag{6}$$

В работе [10] показано, что если такие функции $B_1(t)$, $B_2(t)$ существуют, то параметрические уравнения кривой, соединяющей начальное и конечное состояния системы (2), имеют вид

$$z^1 = \overline{B}_1(t), \quad z^2 = \overline{B}_2(t), \quad \eta = \eta(t), \quad t \in [0,\ t_*],$$

а управление $u(t) = (u_1(t), u_2(t))^{\mathrm{T}}$, являющееся решением терминальной задачи, задается выражением

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = g^{-1}(\overline{B}_1(t), \overline{B}_2(t), \eta(t)) \begin{pmatrix} B_1^{(r_1)}(t) - f_1(\overline{B}_1(t), \overline{B}_2(t), \eta(t)) \\ B_2^{(r_2)}(t) - f_2(\overline{B}_1(t), \overline{B}_2(t), \eta(t)) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Различные подходы к построению функций $B_i(t)$ обсуждались в работах [4, 11, 12]. Следуя [11], будем искать $B_i(t)$ в виде

$$B_i(t) = b_i(t) + c_i d_i(t), \quad i = 1,\, 2, \tag{8}$$

где функции $b_i(t) \in C^{r_i}[0, t_*]$ и на концах отрезка $[0, t_*]$ удовлетворяют тем же граничным условиям, что и функции $B_i(t)$:

$$b_i(0) = z^i_{10}, \quad \ldots, \quad b_i^{(r_i-1)}(0) = z^i_{r_i0}, \quad b_i(t_*) = z^i_{1*}, \quad \ldots, \quad b_i^{(r_i-1)}(t_*) = z^i_{r_i*}, \tag{9}$$

функции $d_i(t) \in C^{r_i}[0, t_*]$ и на концах отрезка $[0,\ t_*]$ вместе со своими производными до $(r_i - 1)$-го порядка включительно обращаются в нуль:

$$d_i(0) = 0, \quad \ldots, \quad d_i^{(r_i-1)}(0) = 0, \quad d_i(t_*) = 0, \quad \ldots, \quad d_i^{(r_i-1)}(t_*) = 0, \tag{10}$$

а c_1, c_2 — пока неизвестные числовые параметры. Выбор функций $B_i(t)$ в виде (8) и выполнение условий (9), (10) для функций $b_i(t)$, $d_i(t)$ гарантируют, что соотношения (4) верны при всех значениях параметров c_1, c_2, поэтому основная проблема заключается в определении таких значений c_1, c_2, для которых решение $\eta(t)$ задачи Коши (5) определено на отрезке $[0,\ t_*]$ и удовлетворяет условиям (6). Подставляя соотношения (8) в правые части уравнений системы (5), получим систему

$$\begin{cases} \dot\eta_1 = q_1(\overline{b}_1(t) + c_1\,\overline{d}_1(t), \overline{b}_2(t) + c_2\,\overline{d}_2(t), \eta), \\ \dot\eta_2 = q_2(\overline{b}_1(t) + c_1\,\overline{d}_1(t), \overline{b}_2(t) + c_2\,\overline{d}_2(t), \eta), \end{cases} \tag{11}$$

где

$$\overline{b}_i(t) = (b_i(t), \ldots, b_i^{(r_i-1)}(t))^{\mathrm{T}}, \quad \overline{d}_i(t) = (d_i(t), \ldots, d_i^{(r_i-1)}(t))^{\mathrm{T}}, \quad i = 1,\, 2,$$

и граничную задачу для нее, заключающуюся в определении таких значений параметров c_1, c_2, что соответствующее решение $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$ системы (11) с начальными условиями

$$\eta_1(0) = \eta_{10}, \quad \eta_2(0) = \eta_{20} \tag{12}$$

определено при всех $t \in [0,\ t_*]$ и

$$\eta_1(t_*) = \eta_{1*}, \quad \eta_2(t_*) = \eta_{2*}. \tag{13}$$

Далее будем рассматривать систему (2), в которой каждая из функций $q_s(z^1, z^2, \eta)$, $s = 1,\, 2$, распадается в произведение функции, зависящей от z^1, z^2, и функции, зависящей от η_s:

$$q_s(z^1, z^2, \eta) = Q_s(z^1, z^2) R_s(\eta_s), \quad s = 1,\, 2, \tag{14}$$

где $Q_s(z^1, z^2) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-2})$, $R_s(\eta_s) \in C^\infty(\mathbb{R})$. В этом случае система (2) примет вид

$$\begin{cases} \dot z^i_1 = z^i_2, \quad \ldots, \quad \dot z^i_{r_i-1} = z^i_{r_i}, \\ \dot z^i_{r_i} = f_i(z^1, z^2, \eta) + g_{i1}(z^1, z^2, \eta)\, u_1 + g_{i2}(z^1, z^2, \eta)\, u_2, \quad i = 1,\, 2, \\ \dot\eta_1 = Q_1(z^1, z^2) R_1(\eta_1), \quad \dot\eta_2 = Q_2(z^1, z^2) R_2(\eta_2), \end{cases} \tag{15}$$

а система (11) — вид

$$\begin{cases} \dot\eta_1 = Q_1(\bar b_1(t) + c_1\,\bar d_1(t), \bar b_2(t) + c_2\,\bar d_2(t))R_1(\eta_1), \\ \dot\eta_2 = Q_2(\bar b_1(t) + c_1\,\bar d_1(t), \bar b_2(t) + c_2\,\bar d_2(t))R_2(\eta_2). \end{cases} \tag{16}$$

Введем обозначения

$$v_i(c_1, c_2) = \int\limits_0^{t_*} Q_i(\bar b_1(t) + c_1\,\bar d_1(t), \bar b_2 + c_2\,\bar d_2(t))\,dt - \int\limits_{\eta_{i0}}^{\eta_{i*}} \frac{d\eta_i}{R_i(\eta_i)}, \quad i = 1,\,2, \tag{17}$$

и докажем условие разрешимости граничной задачи (12), (13) для системы (16).

Лемма 1. Пусть функции $R_s(\eta_s)$, $s = 1, 2$, не обращаются в нуль в $\mathbb{R}$ и удовлетворяют условиям $R_s(\eta_s) = O(\eta_s)$ при $\eta_s \to \infty$, система уравнений

$$v_1(c_1, c_2) = 0, \quad v_2(c_1, c_2) = 0 \tag{18}$$

имеет решение $c_1 = c_{1*}$, $c_2 = c_{2*}$. Тогда $c_1 = c_{1*}$, $c_2 = c_{2*}$ — решение граничной задачи (12), (13) для системы (16).

Доказательство. Как известно [13], условие $R_s(\eta_s) = O(\eta_s)$ при $\eta_s \to \infty$ гарантирует, что решения системы (16) определены при всех $t \in [0,\,t_*]$. Пусть $\eta_s(t, c_1, c_2)$ — решение s-го уравнения системы (16), удовлетворяющее начальному условию $\eta_s(0) = \eta_{s0}$. Поскольку оба уравнения в системе (16) являются уравнениями с разделяющимися переменными, то функции $\eta_s(t, c_1, c_2)$ неявно задаются равенствами

$$\int\limits_{\eta_{s0}}^{\eta_s} \frac{d\beta_s}{R_s(\beta_s)} = \int\limits_0^t Q_s(\bar b_1(\tau) + c_1\,\bar d_1(\tau), \bar b_2(\tau) + c_2\,\bar d_2(\tau))\,d\tau, \quad s = 1,\,2. \tag{19}$$

Из условий $\eta_s(t_*, c_1, c_2) = \eta_{s*}$, $s = 1,\,2$, получаем систему уравнений

$$\int\limits_{\eta_{s0}}^{\eta_{s*}} \frac{d\eta_s}{R_s(\eta_s)} = \int\limits_0^{t_*} Q_s(\bar b_1(t) + c_1\,\bar d_1(t), \bar b_2(t) + c_2\,\bar d_2(t))\,dt, \quad s = 1,\,2,$$

относительно c_1, c_2, которая в силу введенных обозначений совпадает с системой (18). Согласно условию леммы, система (18) имеет решение $c_1 = c_{1*}$, $c_2 = c_{2*}$. Это означает, что функции $\eta_s(t, c_{1*}, c_{2*})$, $s = 1, 2$, удовлетворяют условиям $\eta_s(t_*, c_{1*}, c_{2*}) = \eta_{s*}$, поэтому $c_1 = c_{1*}$, $c_2 = c_{2*}$ является решением граничной задачи (12), (13) для системы (16). Лемма доказана.

Докажем достаточное условие существования решения терминальной задачи (3) для системы (15) для любых начального и конечного состояний системы на любом конечном отрезке времени. Будем обозначать через J множество нечетных натуральных чисел.

Теорема 1. Пусть система (15) регулярна в $\mathbb{R}^n$, функции $Q_s(z^1, z^2)$, $s = 1,\,2$, являются многочленами нечетной степени $2l+1$, $l \in \{0,\,1,\,2,\,\ldots\}$, причем слагаемые старшей степени в каждом из этих многочленов имеют вид

$$A_1^{(s)}(z_1^1)^{2l+1} + A_2^{(s)}(z_1^2)^{2l+1} + \sum_{\substack{i_1,\ldots,j_{r_2}:\\ i_1+\ldots+j_{r_2}=2l+1}} a^{(s)}_{i_1,\ldots,j_{r_2}}\,(z_1^1)^{i_1}\ldots(z_{r_1}^1)^{i_{r_1}}\,(z_1^2)^{j_1}\ldots(z_{r_2}^2)^{j_{r_2}}, \tag{20}$$

где

$$i_2 + i_4 + \ldots + j_2 + j_4 + \ldots \in J, \tag{21}$$

$$A_1^{(1)} A_2^{(2)} - A_1^{(2)} A_2^{(1)} \neq 0. \tag{22}$$

Пусть также функции $R_s(\eta_s)$, $s = 1, 2$, не обращаются в нуль в $\mathbb{R}$ и таковы, что $R_s(\eta_s) = O(\eta_s)$ при $\eta_s \to \infty$. Тогда терминальная задача (3) для системы (15) имеет решение для любых начального и конечного состояний системы и любого отрезка времени $[0,\ t_*]$.

Доказательство. Покажем, что, каковы бы ни были отрезок $[0, t_*]$, начальное и конечное состояния системы, при выполнении условий теоремы существует решение граничной задачи (16). Поскольку функции $R_s(\eta_s)$ не обращаются в нуль в $\mathbb{R}$ и удовлетворяют условиям $R_s(\eta_s) = O(\eta_s)$ при $\eta_s \to \infty$, то, согласно лемме 1, достаточно убедиться в существовании решения $c_1 = c_{1*}$, $c_2 = c_{2*}$ системы уравнений (18). Для этого сначала установим, какими формулами описываются функции $v_s(c_1, c_2)$. Будем полагать, что функции $d_i(t)$ фиксированы в виде $d_i(t) = t^{r_i}(t_* - t)^{r_i}$.

Из условия теоремы следует, что функции $Q_s(\overline{b}_1(t) + c_1\,\overline{d}_1(t), \overline{b}_2 + c_2\,\overline{d}_2(t))$ задаются выражениями

$$A_1^{(s)} c_1^{2l+1} d_1(t)^{2l+1} + A_2^{(s)} c_2^{2l+1} d_2(t)^{2l+1} + \sum_{\substack{i_1,\ldots,j_{r_2}:\\ i_1+\ldots+j_{r_2}=2l+1}} a^{(s)}_{i_1,\ldots,j_{r_2}}\, c_1^{i_1+\ldots+i_{r_1}}\, c_2^{j_1+\ldots+j_{r_2}} \times$$
$$\times\, d_1(t)^{i_1} \ldots (d_1^{(r_1-1)}(t))^{i_{r_1}} d_2(t)^{j_1} \ldots (d_2^{(r_2-1)}(t))^{j_{r_2}} + \alpha_s(c_1, c_2, t),$$

где через $\alpha_s(c_1, c_2, t)$ обозначены слагаемые, содержащие младшие степени переменных c_1, c_2. Из (17) вытекает, что функции $v_s(c_1, c_2)$ являются многочленами степени $2l+1$, в которых слагаемые старшей степени имеют вид

$$A_1^{(s)} c_1^{2l+1} \int\limits_0^{t_*} d_1(t)^{2l+1} dt + A_2^{(s)} c_2^{2l+1} \int\limits_0^{t_*} d_2(t)^{2l+1} dt +$$
$$+ \sum_{\substack{i_1,\ldots,j_{r_2}:\\ i_1+\ldots+j_{r_2}=2l+1}} a^{(s)}_{i_1,\ldots,j_{r_2}} c_1^{i_1+\ldots+i_{r_1}}\, c_2^{j_1+\ldots+j_{r_2}} \int\limits_0^{t_*} d_1(t)^{i_1} \ldots (d_1^{(r_1-1)}(t))^{i_{r_1}} d_2(t)^{j_1} \ldots (d_2^{(r_2-1)}(t))^{j_{r_2}} dt.$$

Повторяя рассуждения, проведенные в ходе доказательства теоремы 3 из работы [11], можно показать, что заменой переменной $\tau = t - t_*/2$ интеграл

$$\int\limits_0^{t_*} d_1(t)^{i_1} \ldots (d_1^{(r_1-1)}(t))^{i_{r_1}} d_2(t)^{j_1} \ldots (d_2^{(r_2-1)}(t))^{j_{r_2}} dt$$

преобразуется к виду

$$\int\limits_{-t_*/2}^{t_*/2} \tilde{d}_1(\tau)^{i_1} \ldots (\tilde{d}_1^{(r_1-1)}(\tau))^{i_{r_1}} \tilde{d}_2(\tau)^{j_1} \ldots (\tilde{d}_2^{(r_2-1)}(\tau))^{j_{r_2}} d\tau,$$

где
$$\tilde{d}_i(\tau) = \left(\frac{t_*^2}{4} - \tau^2\right)^{r_i}.$$

Поскольку функция $\tilde{d}_i(\tau)$ четна, то ее производные четных порядков четны, а производные нечетных порядков нечетны. Из условий (21) вытекает, что в полученном интеграле нечетных функций нечетное число, поэтому подынтегральная функция нечетна и, следовательно, интеграл от нее по отрезку $[-t_*/2,\ t_*/2]$ равен нулю. Это означает, что слагаемые степени $2l+1$ в многочлене $v_s(c_1, c_2)$ описываются выражением

$$A_1^{(s)} c_1^{2l+1} \int\limits_0^{t_*} d_1(t)^{2l+1} dt + A_2^{(s)} c_2^{2l+1} \int\limits_0^{t_*} d_2(t)^{2l+1} dt,$$

а система (18) принимает вид

$$\begin{cases} A_1^{(1)} c_1^{2l+1} \int\limits_0^{t_*} d_1(t)^{2l+1} dt + A_2^{(1)} c_2^{2l+1} \int\limits_0^{t_*} d_2(t)^{2l+1} dt + \gamma_1(c_1, c_2) = 0, \\ A_1^{(2)} c_1^{2l+1} \int\limits_0^{t_*} d_1(t)^{2l+1} dt + A_2^{(2)} c_2^{2l+1} \int\limits_0^{t_*} d_2(t)^{2l+1} dt + \gamma_2(c_1, c_2) = 0, \end{cases}$$

где через $\gamma_1(c_1, c_2)$ и $\gamma_2(c_1, c_2)$ обозначены слагаемые, содержащие младшие степени переменных c_1, c_2. Из условия (22) следует, что эту систему можно преобразовать к виду

$$\begin{cases} c_1^{2l+1} \int\limits_0^{t_*} d_1(t)^{2l+1} dt + A_1 c_2^{2l+1} \int\limits_0^{t_*} d_2(t)^{2l+1} dt + \tilde{\gamma}_1(c_1, c_2) = 0, \\ c_1^{2l+1} \int\limits_0^{t_*} d_1(t)^{2l+1} dt + A_2 c_2^{2l+1} \int\limits_0^{t_*} d_2(t)^{2l+1} dt + \tilde{\gamma}_2(c_1, c_2) = 0, \end{cases} \tag{23}$$

где $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$, $A_1 \neq A_2$, $\tilde{\gamma}_1(c_1, c_2)$, $\tilde{\gamma}_2(c_1, c_2)$ — слагаемые, содержащие младшие степени переменных c_1, c_2.

Для того чтобы доказать существование решения у системы (23), будем использовать технику, предложенную в работе [12]. Покажем, что у каждой из кривых, задаваемых уравнениями системы (23), есть ветвь, имеющая наклонную асимптоту. Введем обозначения

$$w_s(c_1, c_2) = c_1^{2l+1} \int\limits_0^{t_*} d_1(t)^{2l+1} dt + A_s c_2^{2l+1} \int\limits_0^{t_*} d_2(t)^{2l+1} dt + \tilde{\gamma}_s(c_1, c_2), \quad s = 1,\ 2,$$

так что система (23) примет вид

$$w_s(c_1, c_2) = 0, \quad s = 1,\ 2.$$

Обозначим через $W_s(c_1, c_2)$ слагаемые старшей степени в многочлене $w_s(c_1, c_2)$:

$$W_s(c_1, c_2) = c_1^{2l+1} \int\limits_0^{t_*} d_1(t)^{2l+1} dt + A_s c_2^{2l+1} \int\limits_0^{t_*} d_2(t)^{2l+1} dt.$$

Согласно [12], каждому решению $\zeta = K_s$ уравнения $W_s(1,\zeta) = 0$, такому, что выполнено неравенство $W_s'(1, K_s) \neq 0$, соответствует наклонная асимптота кривой $w_s(c_1, c_2) = 0$ с уравнением

$$c_2 = K_s c_1 + L_s, \tag{24}$$

где $L_s = -W_s(1, K_s)/W_s'(1, K_s)$. Уравнение $W_s(1,\zeta) = 0$ принимает вид

$$\int\limits_0^{t_*} d_1(t)^{2l+1} dt + A_s \zeta^{2l+1} \int\limits_0^{t_*} d_2(t)^{2l+1} dt = 0.$$

Поскольку решение $\zeta = K_s$ этого уравнения единственно и описывается формулой

$$K_s = -\left(\frac{\int\limits_0^{t_*} d_1(t)^{2l+1} dt}{A_s \int\limits_0^{t_*} d_2(t)^{2l+1} dt} \right)^{\frac{1}{2l+1}},$$

а производная функции $W_s(1,\zeta)$ в точке $\zeta = K_s$

$$W_s'(1, K_s) = (2l+1) A_s K_s^{2l} \int\limits_0^{t_*} d_2(t)^{2l+1} dt$$

отлична от нуля, то кривая $w_s(c_1, c_2) = 0$ имеет единственную наклонную асимптоту, которая описывается уравнением (24). Повторяя рассуждения, проведенные в ходе доказательства теоремы 2 из работы [12], можно показать, что у кривых $w_s(c_1, c_2) = 0$ нет других ветвей, уходящих на бесконечность.

Из неравенства $A_1 \neq A_2$ вытекает, что $K_1 \neq K_2$, т.е. угловые коэффициенты асимптот различны, поэтому существует точка (c_1, c_2), в которой кривые $w_1(c_1, c_2) = 0$ и $w_2(c_1, c_2) = 0$ пересекаются. Этой точке соответствует решение $c_1 = c_{1*}$, $c_2 = c_{2*}$ системы уравнений (18). Согласно лемме 1, отсюда следует существование решения граничной задачи (16), а это, в свою очередь, означает, что существует решение терминальной задачи (3) для системы (15).

3. Условие управляемости

Из теоремы 1 непосредственно вытекает следующее достаточное условие управлемости для системы (15).

Теорема 2. Пусть система (15) регулярна в $\mathbb{R}^n$, функции $Q_s(z^1, z^2)$, $s = 1,\ 2$, являются многочленами нечетной степени $2l + 1$, $l \in \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$, слагаемые старшей степени в каждом из многочленов имеют вид (20) и удовлетворяют условиям (21), (22), функции $R_s(\eta_s)$, $s = 1,\ 2$, не обращаются в нуль в $\mathbb{R}$ и таковы, что $R_s(\eta_s) = O(\eta_s)$ при $\eta_s \to \infty$. Тогда система (15) управляема в $\mathbb{R}^n$ на любом отрезке времени $[0,\ t_*]$.

Пример. Покажем, что система

$$\begin{cases} \dot{z}_1^i = z_2^i, \quad \dot{z}_2^i = u_i, \quad i = 1,\ 2, \\ \dot{\eta}_1 = \Big((z_1^2)^3 + (z_2^1)^2 - (z_2^2)^2 \Big) \sqrt{\eta_1^2 + 1}, \\ \dot{\eta}_2 = \Big((z_1^1)^3 + (z_2^2)^3 + (z_2^1)^2 \Big) (\cos \eta_2 + 2) \end{cases} \tag{25}$$

управляема в $\mathbb{R}^6$ на любом отрезке времени $[0,\ t_*]$. Это система вида (15), где

$$Q_1(z^1, z^2) = (z_1^2)^3 + (z_2^1)^2 - (z_2^2)^2, \quad Q_2(z^1, z^2) = (z_1^1)^3 + (z_2^2)^3 + (z_2^1)^2,$$

$$R_1(\eta_1) = \sqrt{\eta_1^2 + 1}, \quad R_2(\eta_2) = \cos\eta_2 + 2.$$

Система (25) регулярна в $\mathbb{R}^6$, функции $Q_s(z^1, z^2)$, $s = 1, 2$, являются многочленами третьей степени, в которых слагаемые старшей степени имеют вид (20) и удовлетворяют условию (21). Поскольку $A_1^{(1)} = 0$, $A_2^{(1)} = 1$, $A_1^{(2)} = 1$, $A_2^{(2)} = 0$, то

$$A_1^{(1)} A_2^{(2)} - A_1^{(2)} A_2^{(1)} = -1 \neq 0$$

и условие (22) тоже выполнено. Функции $R_1(\eta_1)$ и $R_2(\eta_2)$ положительны в $\mathbb{R}$ и удовлетворяют условиям $R_s(\eta_s) = O(\eta_s)$ при $\eta_s \to \infty$. Из теоремы 2 следует, что система (25) управляема в $\mathbb{R}^6$ на любом отрезке времени $[0,\ t_*]$.

Заключение

В работе доказано достаточное условие существования решения терминальной задачи для аффинной системы с двумерным управлением, которая может быть преобразована к квазиканоническому вида с двумерной нулевой динамикой, определенному и регулярному на всем пространстве состояний. Получено достаточное условие управляемости для указанного класса систем. Приведен пример аффинной системы шестого порядка, управляемость которой доказывается с помощью предложенного условия.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 14-07-00813) и Министерства образования и науки РФ (проект № 1711 государственного задания РФ).

Список литературы

1. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.

2. Жевнин А.А., Крищенко А.П. Управляемость нелинейных систем и синтез алгоритмов управления // Доклады АН СССР. 1981. Т. 258, № 4. С. 805–809.

3. Краснощеченко В.И., Крищенко А.П. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. 520 с.

4. Фетисов Д.А. Исследование управляемости регулярных систем квазиканонического вида // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2006. № 3. С. 12–30.

5. Ковалев А.М. Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. Киев: Наукова думка, 1980. 174 с.

6. Елкин В.И. Редукция нелинейных управляемых систем: дифференциально-геометрический подход. М.: Наука, 1997. 320 с.

7. Isidori A. Nonlinear control systems. 3rd ed. London: Springer-Verlag, 1995. 550 p.
8. Sun Y. Further results on global controllability of planar nonlinear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2010. Vol. 55, no. 8. P. 1872–1875. DOI: 10.1109/TAC.2010.2048054
9. Крищенко А.П., Клинковский М.Г. Преобразование аффинных систем с управлением и задача стабилизации // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28, № 11. С. 1945–1952.
10. Фетисов Д.А. Об одном методе решения терминальных задач для аффинных систем // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 11. С. 383–400. DOI: 10.7463/1113.0622543
11. Фетисов Д.А. Достаточное условие управляемости многомерных аффинных систем // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 11. С. 281–293. DOI: 10.7463/1114.0737321
12. Фетисов Д.А. Управляемость регулярных систем квазиканонического вида с двумерной нулевой динамикой и скалярным управлением // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 10. С. 123–138. DOI: 10.7463/1012.0465329
13. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Москва: Едиториал УРСС, 2004. 552 с.

Mathematics & Mathematical Modelling
Electronic journal of the Bauman MSTU
http://mathmjournal.ru

Mathematics and Mathematical Modelling of the Bauman MSTU, 2015, no. 6, pp. 32–43.
DOI: 10.7463/mathm.0615.0823117
Received: 13.11.2015

Sufficient Controllability Condition for Affine Systems with Two-Dimensional Control and Two-Dimensional Zero Dynamics

Fetisov D. A.[1,*]

[*] dfetisov@yandex.ru

[1] Bauman Moscow State Technical University, Russia

Keywords: controllability, affine system, terminal problem, quasicanonical form

The controllability conditions are well known if we speak about linear stationary systems: a linear stationary system is controllable if and only if the dimension of the state vector is equal to the rank of the controllability matrix. The concept of the controllability matrix is extended to affine systems, but relations between affine systems controllability and properties of this matrix are more complicated. Various controllability conditions are set for affine systems, but they deal as usual either with systems of some special form or with controllability in some small neighborhood of the concerned point.

An affine system is known to be controllable if the system is equivalent to a system of a canonical form, which is defined and regular in the whole space of states. In this case, the system is said to be feedback linearizable in the space of states. However there are examples, which illustrate that a system can be controllable even if it is not feedback linearizable in any open subset in the space of states. In this article we deal with such systems. Affine systems with two-dimensional control are considered. The system in question is assumed to be equivalent to a system of a quasicanonical form with two-dimensional zero dynamics which is defined and regular in the whole space of states. Therefore the controllability of the original system is equivalent to the controllability of the received system of a quasicanonical form. In this article the sufficient condition for an available solution of the terminal problem is proven for systems of a quasicanonical form with two-dimensional control and two-dimensional zero dynamics. The condition is valid in the case of an arbitrary time interval and arbitrary initial and finite states of the system. Therefore the controllability condition is set for systems of a quasicanonical form with two-dimensional control and two-dimensional zero dynamics. An example is given which illustrates how the proved condition can be used to prove the controllability of the six-dimensional affine system.

The obtained results can be used to solve various control problems in the dynamical systems theory.

References

1. Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M.A. *Topics in Mathematical Systems Theory* New York: McGraw-Hill, 1969. (Russ. ed.: Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M.A. *Ocherki po matematicheskoj teorii sistem*. Moscow, Mir publ., 1971, 400 p.)
2. Zhevnin A.A., Krishchenko A.P. Controllability of nonlinear systems and synthesis of control algorithms. *Doklady AN SSSR*, 1981, vol. 258, no. 4, pp. 805–809. (English translation: *Soviet Physics Doklady*, 1981, vol. 26, pp. 559–561.)
3. Krasnoshchechenko V.I., Krishchenko A.P. *Nelinejnye sistemy: geometricheskie metody analiza i sinteza* [Nonlinear systems: geometrical methods of analysis and synthesis]. Moscow, Bauman MSTU publ., 2005, 520 p. (in Russian).
4. Fetisov D.A. Study of Controllability of Regular Systems of Quasi-canonical Type. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural sciences*, 2006, no. 3, pp. 12–30. (in Russian).
5. Kovalev A.M. *Nelinejnye zadachi upravlenija i nabljudenija v teorii dinamicheskih sistem* [Nonlinear problems of control and observation in the theory of dynamical systems] Kiev, Naukova dumka publ., 1980, 174 p. (in Russian).
6. Elkin V.I. *Reduktsija nelinejnyh upravljaemyh sistem: differentsial'no-geometricheskij podhod* [Reduction of nonlinear control systems: differential geometric approach]. Moscow, Nauka publ., 1997. 320 p. (in Russian).
7. Isidori A. *Nonlinear control systems. 3rd ed*. London, Springer-Verlag, 1995, 550 p.
8. Sun Y. Further results on global controllability of planar nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, vol. 55, no. 8, pp. 1872–1875. DOI: 10.1109/TAC.2010.2048054
9. Krishchenko A.P., Klinkovskii M.G. The transformation of affine systems with control and stabilization problem. *Differentsial'nye uravneniia = Differential Equations*, 1992, vol. 28, no. 11, pp. 1945–1952. (in Russian).
10. Fetisov D.A. A method for solving terminal control problems for affine systems. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2013, no. 11, pp. 383–400. DOI: 10.7463/1113.0622543 (in Russian).
11. Fetisov D.A. Sufficient Controllability Condition for Multidimensional Affine Systems. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2014, no. 11, pp. 281–293. DOI: 10.7463/1114.0737321 (in Russian).
12. Fetisov D.A. Regular systems of a quasicanonical form with scalar control and two-dimensional zero dynamics controllability. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2012, no. 10, pp. 123–138. DOI: 10.7463/1012.0465329 (in Russian).
13. Nemytskij V.V., Stepanov V.V. *Kachestvennaja teorija differentsial'nyh uravnenij* [Qualitative Theory of Differential Equations]. Moscow, Editorial URSS publ., 2004, 552 p. (in Russian).