Математика и Математическое моделирование
Сетевое издание МГТУ им. Н.Э. Баумана
http://mathmjournal.ru

Ссылка на статью:
// Математика и математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 6. С. 17–31.
DOI: **10.7463/mathm.0615.0828643**
Представлена в редакцию: 25.11.2015

УДК 517.977

Решение терминальных задач для аффинных систем с векторным управлением на основе орбитальной линеаризации

Фетисов Д. А.[1,*]
[*] dfetisov@yandex.ru
[1] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Рассматривается терминальная задача для многомерных аффинных систем, не линеаризуемых обратной связью. Предполагается, что после специальным образом выбранной замены независимой переменной исходная система преобразуется в такую аффинную нестационарную систему, которая гладкой невырожденной заменой переменных в пространстве состояний может быть приведена к регулярному каноническому виду. Предлагается новый метод решения терминальных задач для указанного класса систем. Приводится пример решения терминальной задачи для аффинной пятимерной системы с двумерным управлением, не линеаризуемой обратной связью ни на каком открытом подмножестве пространства состояний.

Ключевые слова: аффинная система; терминальная задача; орбитальная линеаризация

Введение

Линеаризация обратной связью широко используется для решения различных задач теории управления. Говорят, что аффинная система линеаризуема обратной связью, если существуют гладкая невырожденная замена переменных в пространстве состояний и обратимая замена управлений, которые преобразуют систему в линейную управляемую систему. Условия линеаризуемости обратной связью для аффинных систем хорошо известны [1, 2].

Для систем, не линеаризуемых обратной связью, была разработана техника орбитальной линеаризации [3, 4, 5, 6, 7, 8], которая заключается в преобразовании системы в линейную управляемую систему после предварительного масштабирования времени — замены независимой переменной. Необходимые и достаточные условия орбитальной линеаризуемости аффинных систем можно найти в работах [4, 6].

В данной работе орбитальная линеаризация аффинных систем используется для решения задачи терминального управления. Различные подходы к решению терминальных задач рассматривались в работах [2, 9, 10, 11, 12]. В частности, в [12] был предложен основанный на технике орбитальной линеаризации метод решения терминальной задачи для аффинных систем квазиканонического вида со скалярным управлением. В настоящей работе этот метод получает дальнейшее развитие и обобщается на случай аффинных систем с векторным управлением.

1. Постановка задачи

Рассматривается аффинная стационарная система с векторным управлением

$$\begin{cases} \dot{x} = k(x,y) + \sum\limits_{j=1}^{m} l_j(x,y)u_j, \\ \dot{y} = a(x,y) + \sum\limits_{j=1}^{m} b_j(x,y)u_j, \end{cases} \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_{n-1})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $y \in \mathbb{R}$, $u = (u_1, \ldots, u_m)^{\mathrm{T}}$, $k(x,y) = (k_1(x,y), \ldots, k_{n-1}(x,y))^{\mathrm{T}}$, $l(x,y) = (l_{1j}(x,y), \ldots, l_{n-1,j}(x,y))^{\mathrm{T}}$, $k_i(x,y), l_{ij}(x,y), a(x,y), b_j(x,y) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n-1}$, не линеаризуемая обратной связью ни на каком открытом подмножестве пространства состояний, и терминальная задача для нее в следующей постановке: заданы состояния (x_0, y_0) и (x_*, y_*), причем $y_0 < y_*$; требуется найти такой момент времени t_* и такие управления $u_j(t) \in C[0, t_*]$, $j = \overline{1, m}$, что траектория $x(t), y(t)$, $t \in [0, t_*]$, замкнутой системы

$$\begin{cases} \dot{x} = k(x,y) + \sum\limits_{j=1}^{m} l_j(x,y)u_j(t), \\ \dot{y} = a(x,y) + \sum\limits_{j=1}^{m} b_j(x,y)u_j(t) \end{cases}$$

соединяет состояния

$$(x,y)\Big|_{t=0} = (x_0, y_0) \tag{2}$$

и

$$(x,y)\Big|_{t=t_*} = (x_*, y_*). \tag{3}$$

Предположим, что хотя бы одна из функций $b_j(x,y)$ не обращается в нуль в $\mathbb{R}^n$. Для определенности будем считать, что это функция $b_m(x,y)$. Выполним в системе (1) замену управлений по формулам

$$v_1 = u_1, \quad \ldots, \quad v_{m-1} = u_{m-1}, \quad v_m = a(x,y) + \sum_{j=1}^{m} b_j(x,y)u_j.$$

Из условия $b_m(x,y) \neq 0$ в $\mathbb{R}^n$ следует, что данная замена является невырожденной. Она преобразует систему (1) к виду

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) + \sum\limits_{j=1}^{m} g_j(x,y)v_j, \\ \dot{y} = v_m, \end{cases} \tag{4}$$

где

$$v = (v_1, \ldots, v_m)^{\mathrm{T}}, \quad f(x,y) = (f_1(x,y), \ldots, f_{n-1}(x,y))^{\mathrm{T}},$$
$$g_j(x,y) = (g_{1j}(x,y), \ldots, g_{n-1,j}(x,y))^{\mathrm{T}}, \quad j = \overline{1,\, m}.$$

Исходная терминальная задача (2), (3) для системы (1) может быть переформулирована для системы (4) как задача определения такого момента времени t_* и таких управлений $v_j(t) \in C[0, t_*]$, $j = \overline{1,\, m}$, что траектория $x(t)$, $y(t)$, $t \in [0, t_*]$, замкнутой системы

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) + \sum\limits_{j=1}^{m} g_j(x,y)\, v_j(t), \\ \dot{y} = v_m(t), \end{cases}$$

соединяет состояния (2) и (3).

Системе (4) в ее пространстве состояний взаимно однозначно соответствуют векторные поля

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x,y) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \mathbf{G}_j = \sum_{i=1}^{n-1} g_{ij}(x,y) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad j = \overline{1,\, m-1}, \quad \mathbf{G}_m = \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{i=1}^{n-1} g_{im}(x,y) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

2. Орбитальная линеаризация системы

Пусть $Q = \{(x,y,v)\colon v_m > 0\}$. Из последнего уравнения системы (4) вытекает, что если $(x(t), y(t), v(t)) \in Q$, где $v(t)$ — управление, а $(x(t), y(t))$ — траектория системы (4), то функция $y(t)$ возрастает, поэтому в области Q каждому значению $y = y(t)$ соответствует единственное значение $x = x(t)$. В связи с этим в области Q можем рассматривать y как независимую переменную. Дополняя постановку задачи условием положительности управления v_m и переходя в области Q к новой независимой переменной y, получим нелинейную нестационарную систему $(n-1)$-го порядка

$$x' = f(x,y) \cdot \frac{1}{v_m} + \sum_{j=1}^{m-1} g_j(x,y) \frac{v_j}{v_m} + g_m(x,y), \tag{5}$$

где штрих обозначает дифференцирование по y. Согласно терминологии, предложенной в работе [6], выполненная замена независимой переменной является интегрируемой заменой, зависящей от управления. Заметим, что дальнейшее рассмотрение системы (4) в области Q правомерно и согласуется с неравенством $y_0 < y_*$, связывающим начальное и конечное значения переменной y. Заменой управлений $w = R(v)$, $w = (w_1, \ldots, w_m)^{\mathrm{T}}$, задаваемой соотношениями

$$w_j = \frac{v_j}{v_m}, \quad j = \overline{1,\, m{-}1}, \quad w_m = \frac{1}{v_m},$$

система (5) преобразуется к аффинной нестационарной системе $(n-1)$-го порядка

$$x' = g_m(x,y) + \sum_{j=1}^{m-1} g_j(x,y) w_j + f(x,y) w_m. \tag{6}$$

Системе (6) в ее расширенном пространстве состояний взаимно однозначно соответствуют векторные поля

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{G}_m = \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{i=1}^{n-1} g_{im}(x,y)\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \tilde{\mathbf{G}}_j = \mathbf{G}_j, \quad j = \overline{1,\, m-1}, \quad \tilde{\mathbf{G}}_m = \mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x,y)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Для системы (6) рассмотрим терминальную задачу, состоящую в нахождении таких управлений $w_j = w_j(y) \in C[y_0, y_*]$, $j = \overline{1,\, m}$, что

$$w_m(y) > 0, \quad y \in [y_0, y_*], \tag{7}$$

и траектория $x = \alpha(y)$, $y \in [y_0, y_*]$, замкнутой системы

$$x' = g_m(x,y) + \sum_{j=1}^{m-1} g_j(x,y)w_j(y) + f(x,y)w_m(y)$$

соединяет состояния

$$x(y_0) = x_0 \tag{8}$$

и

$$x(y_*) = x_*. \tag{9}$$

Заметим, что в отличие от исходной терминальной задачи (2), (3) для системы (4) в задаче (7)–(9) для системы (6) интервал $[y_0, y_*]$ времени управления фиксирован. Связь между решениями терминальных задач (2), (3) для системы (4) и (7)–(9) для системы (6) устанавливается в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть управления $w_1(y), \ldots, w_m(y)$ являются решением терминальной задачи (7)–(9) для системы (6), а $x = \alpha(y)$ — соответствующая траектория системы (6), соединяющая состояния (8) и (9). Если $y = \xi(t)$ — решение задачи Коши

$$\dot{y} = \frac{1}{w_m(y)}, \quad y(0) = y_0, \tag{10}$$

то управления

$$v_j(t) = \frac{w_j(\xi(t))}{w_m(\xi(t))}, \quad j = \overline{1,\, m-1}, \quad v_m(t) = \frac{1}{w_m(\xi(t))} \tag{11}$$

являются решением терминальной задачи (2), (3) для системы (4), момент окончания t_* задается соотношением

$$t_* = \int\limits_{y_0}^{y_*} w_m(y)\, dy, \tag{12}$$

а $x = \alpha(\xi(t))$, $y = \xi(t)$ — соответствующая траектория системы (4), соединяющая состояния (2) и (3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Решение $\xi(t)$ задачи Коши (10) определяется неявно равенством

$$\int\limits_{y_0}^{\xi} w_m(y)\, dy = t.$$

Сравнивая это соотношение с выражением (12), заключаем, что $\xi(t_*) = y_*$, поэтому функция $y = \xi(t)$ удовлетворяет граничным условиям на переменную y в терминальной задаче (2), (3) для системы (4).

Поскольку $x = \alpha(y)$ — траектория системы (6), соединяющая состояния (8) и (9), то $\alpha(y_0) = x_0$ и $\alpha(y_*) = x_*$. Отсюда вытекает, что $x(0) = \alpha(\xi(0)) = \alpha(y_0) = x_0$ и $x(t_*) = \alpha(\xi(t_*)) = \alpha(y_*) = x_*$, поэтому вектор-функция $x = \alpha(\xi(t))$ удовлетворяет граничным условиям на переменные x в терминальной задаче (2), (3) для системы (4).

Для завершения доказательства осталось показать, что вектор-функция $x = \alpha(\xi(t))$, функция $y = \xi(t)$ и управления (11) на отрезке $[0, t_*]$ удовлетворяют системе (4). Это следует из цепочки равенств

$$\frac{d}{dt}\alpha(\xi(t)) = \alpha'(y)\Big|_{y=\xi(t)} \cdot \dot{\xi}(t) =$$
$$= \Big[g_m(\alpha(y), y) + \sum_{j=1}^{m-1} g_j(\alpha(y), y)\, w_j(y) + f(\alpha(y), y) w_m(y)\Big]\Big|_{y=\xi(t)} \cdot \frac{1}{w_m(\xi(t))} =$$
$$= f(\alpha(\xi(t)), \xi(t)) + \sum_{j=1}^{m} g_j(\alpha(\xi(t)), \xi(t))\, v_j(t)$$

и из того, что по условию теоремы функция $y = \xi(t)$ является решением уравнения $\dot{y} = 1/w(y)$. Теорема доказана.

Таким образом, для того чтобы решить терминальную задачу (2), (3) для системы (4), достаточно решить задачу (7)–(9) для системы (6). Если аффинная нестационарная система (6) линеаризуема обратной связью на всем пространстве состояний, то найти решение $w(y) = (w_1(y), \ldots, w_m(y))^{\mathrm{T}}$ терминальной задачи для этой системы можно, используя концепцию обратных задач динамики. Наличие в постановке задачи условия (7) потребует дополнительной проверки, является ли функция $w_m(y)$ положительной на отрезке $[y_0, y_*]$.

Рассмотрим вопрос о том, существует ли гладкая невырожденная замена переменных $(z, y) = \Psi(x, y)$, задаваемая соотношениями $z = \Phi(x, y)$, $y = y$ и преобразующая аффинную нестационарную систему (6) на множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ расширенного пространства состояний к каноническому виду

$$\begin{cases} (z_1^1)' = z_2^1, \quad \ldots, \quad (z_{n_1-1}^1)' = z_{n_1}^1, \quad (z_{n_1}^1)' = p_1(z, y) + \sum\limits_{j=1}^{m} q_{1j}(z, y) w_j, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (z_1^m)' = z_2^m, \quad \ldots, \quad (z_{n_m-1}^m)' = z_{n_m}^m, \quad (z_{n_m}^m)' = p_m(z, y) + \sum\limits_{j=1}^{m} q_{mj}(z, y) w_j, \end{cases} \tag{13}$$

где

$$n_1 + \ldots + n_m = n - 1, \quad z^1 = (z_1^1, \ldots, z_{n_1}^1)^{\mathrm{T}}, \quad \ldots, \quad z^m = (z_1^m, \ldots, z_{n_m}^m)^{\mathrm{T}},$$
$$z = ({z^1}^{\mathrm{T}}, \ldots, {z^m}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \in \Phi(\Omega), \quad p_i(z, y),\ q_{ij}(z, y) \in C^\infty(\Psi(\Omega)), \quad i,\ j = \overline{1, m}.$$

Условия существования такой замены переменных известны [13]. В их формулировке используются обозначения $\mathrm{ad}^0_{\mathbf{A}} \mathbf{B} = \mathbf{B}$, $\mathrm{ad}^k_{\mathbf{A}} \mathbf{B} = [\mathbf{A}, \mathrm{ad}^{k-1}_{\mathbf{A}} \mathbf{B}]$, $k \in \mathbb{N}$, где $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ — коммутатор векторных полей $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. С учетом равенств $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{G}_m$, $\tilde{\mathbf{G}}_j = \mathbf{G}_j$, $j = \overline{1,\, m-1}$, $\tilde{\mathbf{G}}_m = \mathbf{F}$ теорема из работы [13] о преобразовании аффинной нестационарной системы (6) к каноническому виду (13) принимает следующий вид.

Теорема 2. Для того чтобы существовали переменные, в которых система (6) в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ имеет канонический вид (13), необходимо и достаточно, чтобы существовали функции $\varphi_i(x,y) \in C^\infty(\Omega)$, которые в Ω являются решением системы уравнений в частных производных

$$\mathrm{ad}^k_{\mathbf{G}_m}\mathbf{G}_j\varphi_i(x,y) = 0, \quad \mathrm{ad}^k_{\mathbf{G}_m}\mathbf{F}\varphi_i(x,y) = 0, \;\; k = \overline{0,\, n_i{-}2}, \;\; i = \overline{1,\, m}, \;\; j = \overline{1,\, m{-}1}, \tag{14}$$

а соотношения

$$\begin{cases} z = \Phi(x,y), \\ y = y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z^i_k = \mathbf{G}^{k-1}_m\varphi_i(x,y), \;\; k = \overline{1,\, n_i}, \;\; i = \overline{1,\, m}, \\ y = y \end{cases}$$

задают в Ω гладкую невырожденную замену переменных $(z,y) = \Psi(x,y)$. В этих переменных система (6) имеет канонический вид (13), причем

$$p_i(z,y) = \mathbf{G}^{n_i}_m\varphi_i(x,y)\Big|_{(x,y)=\Psi^{-1}(z,y)}, \quad i = \overline{1,\, m},$$

$$q_{ij}(z,y) = \mathbf{G}_j\mathbf{G}^{n_i-1}_m\varphi_i(x,y)\Big|_{(x,y)=\Psi^{-1}(z,y)}, \quad i = \overline{1,\, m}, \;\; j = \overline{1,\, m{-}1},$$

$$q_{im}(z,y) = \mathbf{F}\mathbf{G}^{n_i-1}_m\varphi_i(x,y)\Big|_{(x,y)=\Psi^{-1}(z,y)}, \quad i = \overline{1,\, m},$$

где $(x,y) = \Psi^{-1}(z,y)$ — обратная замена переменных.

3. Решение терминальной задачи

Далее будем полагать, что система (6) на некотором множестве Ω, содержащем начальное (x_0, y_0) и конечное (x_*, y_*) состояния, преобразуется к каноническому виду (13), причем $\Psi(\Omega) = \mathbb{R}^n$. Обозначим $z_0 = \Phi(x_0, y_0)$, $z_* = \Phi(x_*, y_*)$. Тогда терминальная задача (7)–(9) для системы (6) эквивалентна терминальной задаче для системы (13) с тем же ограничением (7) на управление и граничными условиями

$$z(y_0) = z_0, \quad z(y_*) = z_*, \tag{15}$$

где

$$z_0 = ({z^1_0}^{\mathrm{T}}, \ldots, {z^m_0}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}, \quad z^i_0 = (z^i_{10}, \ldots, z^i_{n_i,0})^{\mathrm{T}}, \;\; i = \overline{1,\, m},$$

$$z_* = ({z^1_*}^{\mathrm{T}}, \ldots, {z^m_*}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}, \quad z^i_* = (z^i_{1*}, \ldots, z^i_{n_i,*})^{\mathrm{T}}, \;\; i = \overline{1,\, m}.$$

Пусть $z^i_1 = h_i(y) \in C^{n_i}[y_0, y_*]$, $i = \overline{1,\, m}$, — любые функции, удовлетворяющие условиям

$$h_i(y_0) = z^i_{10}, \quad h'_i(y_0) = z^i_{20}, \quad \ldots, \quad h^{(n_i-1)}_i(y_0) = z^i_{n_i,0},$$

$$h_i(y_*) = z^i_{1*}, \quad h'_i(y_*) = z^i_{2*}, \quad \ldots, \quad h^{(n_i-1)}_i(y_*) = z^i_{n_i,*}.$$

Обозначим

$$\overline{h}_i(y) = \Big(h_i(y), h'_i(y), \ldots, h^{(n_i-1)}_i(y)\Big)^{\mathrm{T}}, \quad \overline{h}(y) = \Big(\overline{h}^{\mathrm{T}}_1(y), \overline{h}^{\mathrm{T}}_2(y), \ldots, \overline{h}^{\mathrm{T}}_m(y)\Big)^{\mathrm{T}}.$$

Вектор-функция $z = \overline{h}(y) \in C^1[y_0, y_*]$ удовлетворяет граничным условиям (15) на переменные z в терминальной задаче для системы (13). Чтобы найти управление $w = w(y)$, реализующее эту вектор-функцию в качестве решения системы (13), подставим $z = \overline{h}(y)$ в (13). В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} h_1^{(n_1)}(y) = p_1(\overline{h}(y), y) + \sum\limits_{j=1}^{m} q_{1j}(\overline{h}(y), y) w_j, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ h_m^{(n_m)}(y) = p_m(\overline{h}(y), y) + \sum\limits_{j=1}^{m} q_{mj}(\overline{h}(y), y) w_j, \end{cases}$$

относительно управлений $w_1, \ldots, w_m$, которую можно переписать в виде

$$H(y) = P(y) + Q(y) w, \tag{16}$$

где $H(y) = \left(h_1^{(n_1)}(y), \ldots, h_m^{(n_m)}(y)\right)^{\mathrm{T}}$, $P(y) = \left(p_1(\overline{h}(y), y), \ldots, p_m(\overline{h}(y), y)\right)^{\mathrm{T}}$, $Q(y)$ — $(m \times m)$-матрица с элементами $q_{ij}(\overline{h}(y), y)$, $i, j = \overline{1, m}$. Если при всех $y \in [y_0, y_*]$ матрица $Q(y)$ невырождена, то система (16) имеет единственное решение

$$w(y) = \begin{pmatrix} w_1(y) \\ \vdots \\ w_m(y) \end{pmatrix} = Q^{-1}(y)(H(y) - P(y)). \tag{17}$$

Управление $w(y)$ реализует вектор-функцию $z = \overline{h}(y)$ в качестве решения системы (13). Если дополнительно при всех $y \in [y_0, y_*]$ выполнено неравенство $w_m(y) > 0$, то управление (17) является решением терминальной задачи (7)–(9) для системы (13). В этом случае управление (17) является также решением терминальной задачи (7)–(9) для системы (6). При этом $x = \Phi^{-1}(\overline{h}(y), y)$, $y \in [y_0, y_*]$, — y-параметрическая траектория системы (6), соединяющая в фазовом пространстве этой системы состояния x_0 и x_*. Решение терминальной задачи (2), (3) для системы (4), момент окончания t_* и соответствующую траекторию системы (4) можно найти, используя теорему 1.

4. Пример

Рассмотрим аффинную систему пятого порядка с двумерным управлением

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -v_1 + (x_3 - x_1^2)\, v_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_4^2 + (x_1 - 3yx_2x_4^2 - 3yx_4^5)\, v_2, \\ \dot{x}_3 = -2x_1v_1 + (x_4 + 2x_1x_3 - 2x_1^3)\, v_2, \\ \dot{x}_4 = 1 + y(x_2 + x_4^3)\, v_2, \\ \dot{y} = v_2 \end{cases} \tag{18}$$

и терминальную задачу для нее с граничными условиями

$$\begin{matrix} x_1(0) = -2, & x_2(0) = 12, & x_3(0) = 5, & x_4(0) = -2, & y(0) = 0, \\ x_1(t_*) = -4, & x_2(t_*) = -26, & x_3(t_*) = 17, & x_4(t_*) = 3, & y(t_*) = 1. \end{matrix} \tag{19}$$

Покажем, что система (18) не линеаризуема обратной связью ни на каком открытом подмножестве пространства состояний. Системе (18) взаимно однозначно соответствуют векторные поля

$$\mathbf{F} = -3x_4^2\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_4}, \quad \mathbf{G}_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1} - 2x_1\frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$\mathbf{G}_2 = (x_3 - x_1^2)\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1 - 3yx_2x_4^2 - 3yx_4^5)\frac{\partial}{\partial x_2} + (x_4 + 2x_1x_3 - 2x_1^3)\frac{\partial}{\partial x_3} + y(x_2 + x_4^3)\frac{\partial}{\partial x_4} + \frac{\partial}{\partial y}.$$

Известно [1], что для линеаризуемости обратной связью системы (18) в некоторой окрестности точки χ пространства состояний необходимо, чтобы размерность распределения

$$S = \operatorname{span}\{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \operatorname{ad}_{\mathbf{F}} \mathbf{G}_1, \operatorname{ad}_{\mathbf{F}} \mathbf{G}_2, \ldots, \operatorname{ad}_{\mathbf{F}}^4 \mathbf{G}_1, \operatorname{ad}_{\mathbf{F}}^4 \mathbf{G}_2\}$$

в точке χ совпадала с размерностью системы, т.е. была равна 5. Вместе с тем непосредственные вычисления показывают, что

$$\operatorname{ad}_{\mathbf{F}} \mathbf{G}_1 = 0, \quad \operatorname{ad}_{\mathbf{F}} \mathbf{G}_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}$$

и, следовательно, $\operatorname{ad}_{\mathbf{F}}^k \mathbf{G}_1 = 0$ при всех $k \geqslant 1$, а $\operatorname{ad}_{\mathbf{F}}^k \mathbf{G}_2 = 0$ при всех $k \geqslant 2$, поэтому размерность распределения S в произвольной точке пространства состояний совпадает с размерностью распределения $S_1 = \operatorname{span}\{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \operatorname{ad}_{\mathbf{F}} \mathbf{G}_2\}$, которая, как нетрудно видеть, равна трем. Отсюда следует, что система (18) не линеаризуема обратной связью ни на каком открытом подмножестве пространства состояний.

Покажем, что тем не менее система (18) орбитально линеаризуема и терминальную задачу для нее можно решить предложенным методом. Будем далее рассматривать систему (18) в области $Q = \{(x, y, v) | v_2 > 0\}$. Перейдем в этой области к новой независимой переменной y. В результате получим нелинейную нестационарную систему четвертого порядка

$$\begin{cases} x_1' = -\dfrac{v_1}{v_2} + x_3 - x_1^2, \\ x_2' = -3x_4^2\dfrac{1}{v_2} + x_1 - 3yx_2x_4^2 - 3yx_4^5, \\ x_3' = -2x_1\dfrac{v_1}{v_2} + x_4 + 2x_1x_3 - 2x_1^3, \\ x_4' = \dfrac{1}{v_2} + y(x_2 + x_4^3), \end{cases}$$

которая заменой управлений $w_1 = v_1/v_2$, $w_2 = 1/v_2$ преобразуется в аффинную систему

$$\begin{cases} x_1' = x_3 - x_1^2 - w_1, \\ x_2' = x_1 - 3yx_2x_4^2 - 3yx_4^5 - 3x_4^2w_2, \\ x_3' = x_4 + 2x_1x_3 - 2x_1^3 - 2x_1w_1, \\ x_4' = y(x_2 + x_4^3) + w_2. \end{cases} \tag{20}$$

Для системы (20) получаем терминальную задачу с ограничением на управление

$$w_2 > 0 \tag{21}$$

и с граничными условиями

$$
\begin{aligned}
&x_1(0) = -2, \quad x_2(0) = 12, \quad x_3(0) = 5, \quad x_4(0) = -2, \\
&x_1(1) = -4, \quad x_2(1) = -26, \quad x_3(1) = 17, \quad x_4(1) = 3.
\end{aligned} \tag{22}
$$

Соотношения

$$
z_1^1 = x_3 - x_1^2, \quad z_2^1 = x_4, \quad z_1^2 = x_2 + x_4^3, \quad z_2^2 = x_1, \quad y = y
$$

задают в $\mathbb{R}^5$ гладкую невырожденную замену переменных $(z, y) = \Psi(x, y)$, которая преобразует систему (20) к каноническому виду

$$
\begin{cases}
(z_1^1)' = z_2^1, \quad (z_2^1)' = y z_1^2 + w_2, \\
(z_1^2)' = z_2^2, \quad (z_2^2)' = z_1^1 - w_1.
\end{cases} \tag{23}
$$

Отображение Ψ^{-1}, обратное к Ψ, описывается формулами

$$
x_1 = z_2^2, \quad x_2 = z_1^2 - (z_2^1)^3, \quad x_3 = z_1^1 + (z_2^2)^2, \quad x_4 = z_2^1, \quad y = y. \tag{24}
$$

Терминальная задача (21), (22) для системы (20) эквивалентна терминальной задаче для системы (23) с тем же ограничением (21) на управление и с граничными условиями

$$
\begin{aligned}
&z_1^1(0) = 1, \quad z_2^1(0) = -2, \quad z_1^2(0) = 4, \quad z_2^2(0) = -2, \\
&z_1^1(1) = 1, \quad z_2^1(1) = 3, \quad z_1^2(1) = 1, \quad z_2^2(1) = -4.
\end{aligned}
$$

В качестве функции $h_1(y)$, удовлетворяющей условиям

$$
h_1(0) = 1, \quad h_1'(0) = -2, \quad h_1(1) = 1, \quad h_1'(1) = 3,
$$

выберем многочлен $h_1(y) = y^3 + y^2 - 2y + 1$, а в качестве функции $h_2(y)$, удовлетворяющей условиям

$$
h_2(0) = 4, \quad h_2'(0) = -2, \quad h_2(1) = 1, \quad h_2'(1) = -4,
$$

возьмем многочлен $h_2(y) = -y^2 - 2y + 4$. Соотношения

$$
\begin{aligned}
&z_1^1 = h_1(y) = y^3 + y^2 - 2y + 1, \quad z_2^1 = h_1'(y) = 3y^2 + 2y - 2, \\
&z_1^2 = h_2(y) = -y^2 - 2y + 4, \quad z_2^2 = h_2'(y) = -2y - 2
\end{aligned} \tag{25}
$$

являются y-параметрическими уравнениями той кривой в пространстве состояний системы (23), которая соединяет начальное и конечное состояния системы. Подставляя в систему (23) соотношения (25) и выражая w_1, w_2 из второго и четвертого уравнений системы, найдем управления, реализующие эту траекторию в качестве траектории системы (23):

$$
w_1(y) = y^3 + y^2 - 2y + 3, \quad w_2(y) = y^3 + 2y^2 + 2y + 2.
$$

Функция $w_2(y)$ положительна на отрезке $[0, 1]$, поэтому найденные управления являются решением задачи для системы (23). Эти же управления являются решением терминальной задачи (21), (22) для системы (20), а соотношения

$$x_1 = -2y - 2, \quad x_2 = -y^2 - 2y + 4 - (3y^2 + 2y - 2)^3,$$
$$x_3 = y^3 + y^2 - 2y + 1 + (2y + 2)^2, \quad x_4 = 3y^2 + 2y - 2,$$

полученные из (25) с помощью равенств (24), задают кривую, соединяющую в пространстве состояний системы (20) граничные состояния (22).

Чтобы построить теперь решение терминальной задачи (19) для системы (18), воспользуемся теоремой 1. Задача Коши (10) для найденной функции $w_2(y)$ принимает вид

$$\dot{y} = \frac{1}{y^3 + 2y^2 + 2y + 2}, \quad y(0) = 0.$$

Решение $y = \xi(t)$ этой задачи неявно задается равенством

$$\frac{1}{4}\xi^4 + \frac{2}{3}\xi^3 + \xi^2 + 2\xi = t.$$

Из условия $\xi(t_*) = 1$ находим, что $t_* = 47/12$. Управления $v_1(t)$, $v_2(t)$, являющиеся решением задачи (19) для системы (18), определяются выражениями

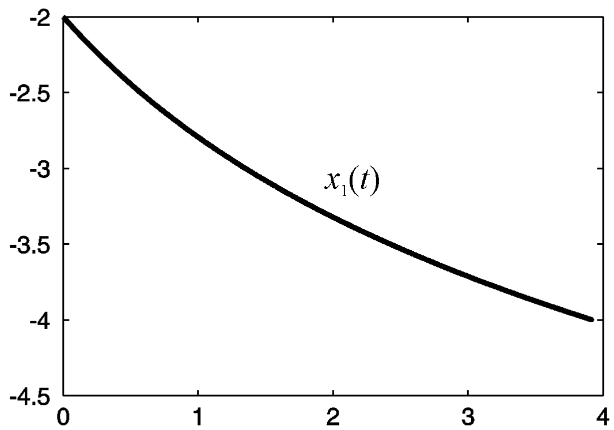
$$v_1(t) = \frac{w_1(\xi(t))}{w_2(\xi(t))}, \quad v_2(t) = \frac{1}{w_2(\xi(t))}, \quad t \in \left[0, \frac{47}{12}\right],$$

а соотношения

$$x_1 = -2\xi(t) - 2, \quad x_2 = -\xi^2(t) - 2\xi(t) + 4 - (3\xi^2(t) + 2\xi(t) - 2)^3,$$
$$x_3 = \xi^3(t) + \xi^2(t) - 2\xi(t) + 1 + (2\xi(t) + 2)^2, \quad x_4 = 3\xi^2(t) + 2\xi(t) - 2, \quad y = \xi(t)$$

задают в пространстве состояний системы (18) t-параметрическую кривую, соединяющую граничные состояния (19).

Графики функций $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), y(t), v_1(t), v_2(t)$ на отрезке $[0, 47/12]$ приведены на рис. 1–рис. 4.



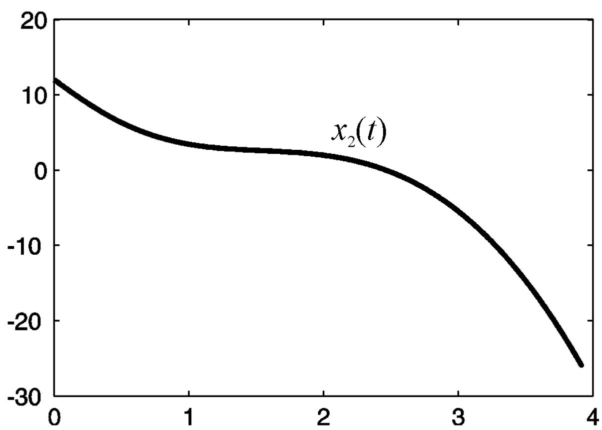


Рис. 1. Графики функций $x_1(t)$, $x_2(t)$

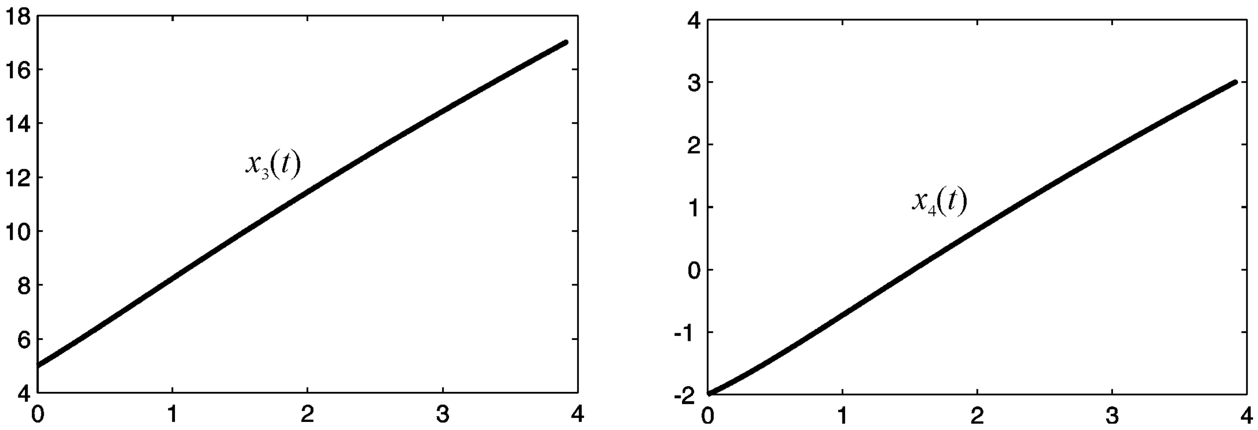


Рис. 2. Графики функций $x_3(t)$, $x_4(t)$

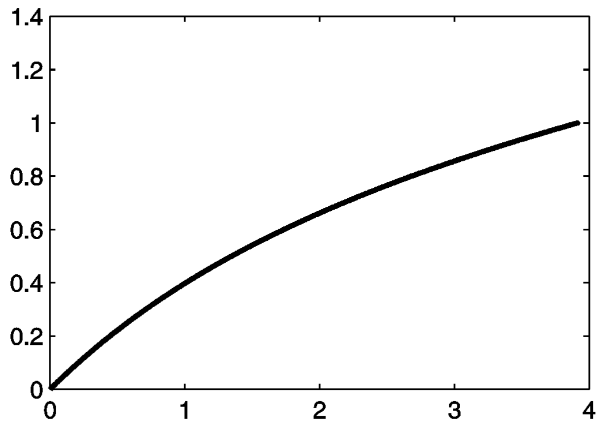


Рис. 3. График функции $y(t)$

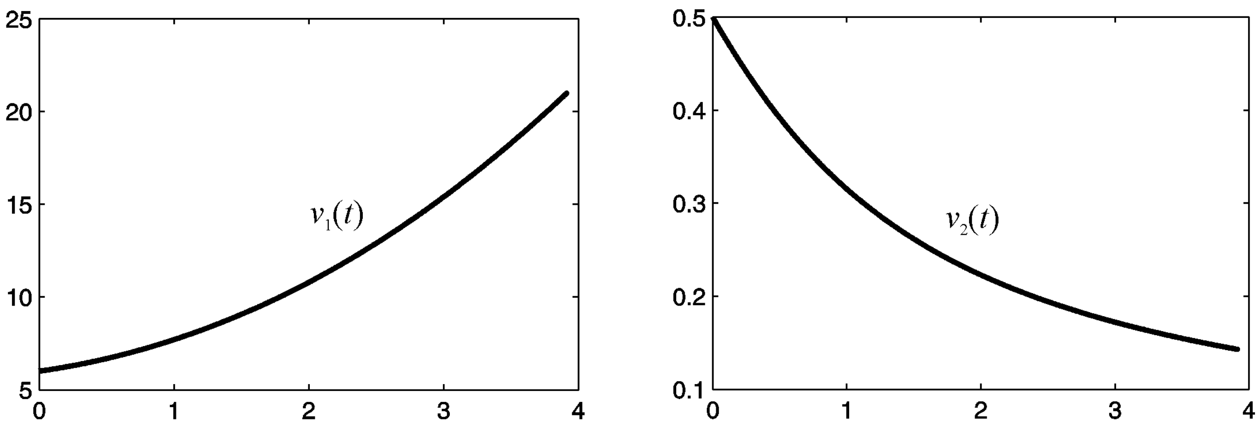


Рис. 4. Графики функций $v_1(t)$, $v_2(t)$

Заключение

Для аффинных систем с векторным управлением, не линеаризуемых обратной связью, предложен метод решения терминальных задач. Метод основан на орбитальной линеаризации системы, которая включает в себя выполнение замены независимой переменной и последующую линеаризацию обратной связью преобразованной системы. Предложенный метод использован для решения терминальной задачи для аффинной системы пятого порядка с двумя управлениями, которая не линеаризуется обратной связью ни на каком открытом подмножестве пространства состояний, но тем не менее допускает орбитальную линеаризацию.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 14-07-00813) и Министерства образования и науки РФ (проект № 1711 государственного задания РФ).

Список литературы

1. Jakubczyk B., Respondek W. On linearization of control systems // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. 1980. Vol. 28. P. 517–522.
2. Краснощеченко В.И., Крищенко А.П. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. 520 с.
3. Li S.-J., Respondek W. Orbital feedback linearization for multi-input control systems // Int. J. of Robust and Nonlinear Control. 2015. Vol. 25, no. 9. P. 1352–1378. DOI: 10.1002/rnc.3147
4. Guay M. An algorithm for orbital feedback linearization of single-input control affine systems // Systems & Control Letters. 1999. Vol. 38, no. 4-5. P. 271–281. DOI: 10.1016/S0167-6911(99)00074-2
5. Sampei M., Furuta K. On time scaling for nonlinear systems: Application to linearization // IEEE Transactions on Automatic Control. 1986. Vol. 31, no. 5. P. 459–462. DOI: 10.1109/TAC.1986.1104290
6. Крищенко А.П. Орбитальная линеаризация аффинных систем // Доклады Академии наук. 2013. Т. 453, № 6. С. 620–623.
7. Saito A., Sekiguchi K., Sampei M. Exact linearization by time scale transformation based on relative degree structure of single-input nonlinear systems // IEEE Conference on Decision and Control. Atlanta, USA. 2010. P. 5408–5413. DOI: 10.1109/CDC.2010.5717669
8. Respondek W. Orbital feedback linearization of single-input nonlinear control system // Proceedings of IFAC NOLCOS'98. Enschede, The Netherlands, 1998. P. 499–504.
9. Елкин В.И. Редукция нелинейных управляемых систем: дифференциально-геометрический подход. М.: Наука, 1997. 320 с.
10. Крищенко А.П., Фетисов Д.А. Терминальная задача для многомерных аффинных систем // Доклады Академии наук. 2013. Т. 452, № 2. С. 144–149.

11. Крищенко А.П., Фетисов Д.А. Задача терминального управления для аффинных систем // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 11. С. 1410–1420.

12. Фетисов Д.А. Решение терминальных задач для аффинных систем квазиканонического вида на основе орбитальной линеаризации // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, № 12. С. 1660–1668.

13. Крищенко А.П. Преобразование многомерных аффинных управляемых динамических систем // Управляемые нелинейные системы: сб. статей. М.: ВНИИ Системных Исследований, 1991. № 2. С. 5–14.

Mathematics & Mathematical Modelling
Electronic journal of the Bauman MSTU
http://mathmjournal.ru

Mathematics and Mathematical Modelling of the Bauman MSTU, 2015, no. 6, pp. 17–31.
DOI: **10.7463/mathm.0615.0828643**
Received: 25.11.2015

An Orbital Feedback Linearization Approach to Solving Terminal Problems for Affine Systems with Vector Control

Fetisov D. A.[1,*]

[*] dfetisov@yandex.ru

[1] Bauman Moscow State Technical University, Russia

Keywords: affine system, terminal problem, orbital linearization

State-feedback linearization is widely used to solve various problems of the control theory. An affine system is said to be state-feedback linearizable if there are a smooth change of variables in the space of states and an invertible change of controls, which transform the system to the system of a regular canonical form. However if a system is not state-feedback linearizable it yet can be orbitally feedback linearized, i.e. the system can be transformed to a regular canonical form after a change of the independent variable.

The article solves the following terminal problem for multi-dimensional stationary affine systems: for given two states, find controls and a time T such that the corresponding trajectory of the system joins these states for the time T. We make an integrable change of the independent variable depending on controls. As a result, we obtain a non-stationary affine system, its dimension being one less than dimension of the original system. The new terminal problem with the restriction on controls is formulated for the transformed system. We prove the relation between solutions of the original terminal problem and solutions of the terminal problem for the transformed system. It is shown that to solve the original terminal problem it is sufficient to solve terminal problem for the transformed system. Then, we check whether the transformed system can be state-feedback linearized. For this purpose, we check the necessary and sufficient conditions of state-feedback linearization for non-stationary affine systems. If the conditions are met then we transform the system to a regular canonical form for which the concept of inverse dynamics problems can be used to solve terminal problems. However, due to the restriction on controls an additional check is necessary whether the found controls meet the restriction.

An example of the terminal problem for the five-dimensional affine system with two controls is given. We prove that the system in question is not state-feedback linearizable on any open subset of the state space. However, the system can be transformed to a regular canonical form after the change of the independent variable depending on controls. The proposed method allows us to solve the terminal problem.

References

1. Jakubczyk B., Respondek W. On linearization of control systems. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math.*, 1980, vol. 28, pp. 517–522.
2. Krasnoshchechenko V.I., Krishchenko A.P. *Nelinejnye sistemy: geometricheskie metody analiza i sinteza* [Nonlinear systems: geometrical methods of analysis and synthesis]. Moscow, Bauman MSTU publ., 2005, 520 p. (in Russian).
3. Li S.-J., Respondek W. Orbital feedback linearization for multi-input control systems. *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, 2015, vol. 25, no. 9, pp. 1352–1378. DOI: 10.1002/rnc.3147
4. Guay M. An algorithm for orbital feedback linearization of single-input control affine systems. *Systems & Control Letters*, 1999, vol. 38, no. 4-5, pp. 271–281. DOI: 10.1016/S0167-6911(99)00074-2
5. Sampei M., Furuta K. On time scaling for nonlinear systems: Application to linearization. IEEE Transactions on Automatic Control. 1986. Vol. 31, no. 5. P. 459–462. DOI: 10.1109/TAC.1986.1104290
6. Krishchenko A.P. Orbital linearization of affine systems. *Doklady Akademii nauk*, 2013, vol. 453, no. 6, pp. 620–623. (English version of journal: *Doklady Mathematics*, 2013, vol. 88, iss. 3, pp. 762–765. DOI: 10.1134/S1064562413060367).
7. Saito A., Sekiguchi K., Sampei M. Exact linearization by time scale transformation based on relative degree structure of single-input nonlinear systems. *IEEE Conference on Decision and Control. Atlanta, USA*, 2010, pp. 5408–5413. DOI: 10.1109/CDC.2010.5717669
8. Respondek W. Orbital feedback linearization of single-input nonlinear control system. *Proceedings of IFAC NOLCOS'98. Enschede, The Netherlands*, 1998, pp. 499–504.
9. Elkin V.I. *Reduktsija nelinejnyh upravljaemyh sistem: differentsial'no-geometricheskij podhod* [Reduction of nonlinear control systems: differential geometric approach]. Moscow, Nauka publ., 1997. 320 p. (in Russian).
10. Krishchenko A.P., Fetisov D.A. Terminal problem for multidimensional affine systems. *Doklady Akademii nauk*, 2013, vol. 452, no. 2, pp. 144–149. (English version of journal: *Doklady Mathematics*, vol. 88, iss. 2, pp. 608–612. DOI: 10.1134/S1064562413050098).
11. Krishchenko A.P., Fetisov D.A. Terminal control problem for affine systems. *Differentsial'nye uravnenija*, 2013, vol. 49, no. 11, pp. 1410–1420. (English version of journal: *Differential Equations*, vol. 49, iss. 11, pp. 1378–1388. 10.1134/S0012266113110062).
12. Fetisov D.A. Solution of terminal problems for affine systems in quasicanonical form on the basis of orbital linearization. *Differentsial'nye uravnenija*, 2014, vol. 50, no. 12, pp. 1660–1668. (English version of journal: *Differential Equations*, vol. 50, iss. 12, pp. 1664–1672. DOI: 10.1134/S0012266114120106).
13. Krishchenko A.P. Transformation of multidimensional affine controlled systems. *Upravlyaemye nelineynye sistemy: sb. statey* [Controlled non-linear systems: collect. articles]. Moscow, Research Institute of Systems Research, 1991, no. 2, pp. 5-14. (in Russian)