Математика и Математическое моделирование
Сетевое издание
МГТУ им. Н.Э. Баумана
http://mathmjournal.ru

Ссылка на статью:
// Математика и математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 6. С. 1–16.

DOI: **10.7463/mathm.0615.0822138**

Представлена в редакцию: 09.11.2015

УДК 517.98

Стохастические лапласиан и даламбертиан Леви и уравнения Максвелла

Волков Б. О.[1,*]

[*]borisvolkov1986@gmail.com

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
[2]Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

В статье вводятся стохастические лапласиан Леви и даламбертиан Леви, определенные с помощью чезаровских средних вторых частных производных и действующие на соболевском пространстве над мерой Винера. Находятся значения этих операторов на стохастическом параллельном переносе, порожденным связностью (вектором-потенциалом электромагнитного поля). Показано, что в отличие от детерминированного случая не выполняется теорема об эквивалентности уравнений Максвелла на евклидовом пространстве и на пространстве Минковского и соответственно уравнения Лапласа для лапласиана Леви и уравнения Даламбера для даламбертиана Леви.

Ключевые слова: уравнения Максвелла; лапласиан Леви; стохастический параллельный перенос; даламбертиан Леви

Введение

Полем Леви в 20-е годы XX века было предложено несколько определений бесконечномерного лапласиана, в последствии названного его именем (см. [7]). Первое из них (определение лапласиана Леви с помощью специального вида второй производной) заключается в следующем. Если функция $\mathfrak{f}\colon L_2(0,1) \to \mathbb{R}$ такая, что для всех $x, u, v \in L_2(0,1)$ для второй производной $\mathfrak{f}''$ верно равенство

$$\mathfrak{f}''(x)(u,v) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 K_V(x)(t,s)u(t)\,v(s)\,dt\,ds + \int\limits_0^1 K_L(x)(t)\,u(t)\,v(t)\,dt, \tag{1}$$

где $K_V(x) \in L_2([0,1]\times[0,1])$ и $K_L(x) \in L_\infty([0,1])$, то значение лапласиана Леви на $\mathfrak{f}$ определяется по формуле

$$\Delta_L \mathfrak{f}(x) = \int\limits_0^1 K_L(x)(t)\,dt.$$

Другое определение (определение лапласиана Леви, зависящее от выбора ортонормированного базиса) состоит в следующем. Пусть $\{e_n\}$ — ортонормированный базис в $L_2(0,1)$.

Значение лапласиана Леви $\Delta_L^{(e_n)}$ на $\mathfrak{f}$ определяется равенством

$$\Delta_L^{(e_n)}\mathfrak{f}(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathfrak{f}''(x)(e_k,e_k), \tag{2}$$

Для базисов $\{e_n\}$ из специального класса слабо равномерно плотных базисов, эти два определения эквивалентны (см. [7]). Некоторые стандартные базисы тригонометрических функций являются слабо равномерно плотными. Если усреднение по Чезаро в определении лапласиана (2) заменить на сумму ряда получится определение лапласиана Гросса — Вольтерры, который в отличие от лапласиана Леви является обобщением конечномерного лапласиана.

В работе [5, 6] Л. Аккарди, П. Джибилиско и И.В. Волович (см. также [3]) ввели аналог первого определения лапласиана Леви (этот аналог также называют лапласианом Леви) и дифференциальный оператор, названный даламбертианом Леви, заданные более сложным видом второй производной, чем (1), и изучили связь этих операторов с калибровочными полями. А именно, ими было доказано, что связность в тривиальном векторном расслоении, базой которого является евклидово пространство (пространство Минковского), является решением уравнений Янга — Миллса тогда и только тогда, когда соответствующий связности параллельный перенос является Леви-гармоническим функционалом (или решением уравнения Даламбера — Леви соответственно). Подход к лапласиану Леви с помощью специального вида второй производной был использован также в работе [8], где было рассмотрено расслоение над компактным римановым многообразием и был рассмотрен стохастический случай. А именно, был введен стохастический лапласиан Леви, определенный с помощью специального вида второй производной, и для него доказана теорема об эквивалентности уравнений Янга — Миллса для связности и уравнения Лапласа — Леви для стохастического параллельного переноса. В [2] и [10] были соответственно введены лапласиан и даламбертиан Леви на многообразиях, определенные с помощью среднего Чезаро вторых производных по направлению. Для таких операторов в [10] была доказана теорема о связи лапласиана Леви и даламбертиана Леви и калибровочных полей, но эквивалентность различных способов определений операторов не доказывалось. Для плоского случая такая эквивалентность была доказана в [11]. На данный момент неизвестно совпадают ли операторы в случае расслоения над многообразием.

В настоящей работе показывается, что определения лапласиана Леви и даламбертиана Леви с помощью чезаровских средних вторых производных переносятся на стохастический случай, но в отличие от детерминированного случая для теорема о связи с калибровочными полями не выполняется: значение такого лапласиана Леви (даламбертиана Леви) на стохастическом параллельном переносе не обращается в ноль, если соответствующая связность является решением уравнений Максвелла без источника на евклидовом пространстве (пространстве Минковского).

Статья построена следующим образом. В первом разделе для наглядности разобран детерминированный случай лапласиана и даламбертиана Леви, определенных с помощью чезаровского усреднения вторых производных, и уравнений Максвелла. Во втором разделе найдена вторая производная стохастического параллельного переноса. В третьем разделе доказываются технические леммы. В четвертом разделе вводятся стохастические лапласиан и даламбертиан Леви и находятся их значения на стохастическом параллельном переносе, при этом используются результаты предыдущих двух разделов.

1. Уравнения Максвелла и параллельный перенос вдоль кривых

Везде ниже греческие индексы пробегают значения $\{1,\ldots,d\}$. Пусть $\{p_1,\ldots,p_d\}$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^d$. Символом $\delta_{\nu\mu}$ обозначим евклидову метрику, а символом $\eta_{\nu\mu}$ метрику Минковского (мы считает, что в базисе $\{p_1,\ldots,p_d\}$ метрика η задается диагональной матрицей с диагональю $\{+1,-1,\ldots,-1\}$). Мы будем опускать и поднимать индексы с помощью евклидовой метрики и суммировать, используя обозначения Эйнштейна.

Пусть $a(x)=a_\mu(x)\,dx^\mu$ — вещественная C^∞-гладкая 1-форма на $\mathbb{R}^d$. Пусть 2-форма $f(x)=\sum\limits_{\mu<\nu}f_{\mu\nu}(x)\,dx^\mu\wedge dx^\nu$ определена формулой $f_{\mu\nu}=\partial_\mu a_\nu-\partial_\nu a_\mu$. Тогда $ia(x)$ является связностью в тривиальном векторном расслоении $\mathbb{R}^d\times\mathbb{C}$, ассоциированным с главным расслоением $\mathbb{R}^d\times U(1)$, а 2-форма $if(x)$ является тензором кривизны в этом расслоении. Уравнения Максвелла без источника в евклидовом случае можно рассматривать как уравнение на 1-форму a, имеющие вид $\partial_\mu f^\mu_{\ \nu}=\delta^{\lambda\mu}\partial_\lambda(\partial_\mu a_\nu-\partial_\nu a_\mu)=0$. Уравнения Максвелла без источника в случае пространства Минковского можно рассматривать как уравнение на 1-форму a, имеющие вид:

$$\eta^{\lambda\mu}\partial_\lambda f_{\mu\nu}=\eta^{\lambda\mu}\partial_\lambda(\partial_\mu a_\nu-\partial_\nu a_\mu)=0.$$

Рассмотрим пространство абсолютно непрерывных функций $\gamma\colon[0,\,1]\to\mathbb{R}^d$, удовлетворяющих условиям $\gamma(0)=0$, $\dot\gamma\in L_2((0,1),\mathbb{R}^d)$. Параллельный перенос в тривиальном векторном расслоении $\mathbb{R}^d\times\mathbb{C}$, порожденный связностью $ia(x)$, мы будем рассматривать как функционал, действующий на пространстве $W_0^{2,1}([0,1],\mathbb{R}^d)$ по формуле

$$U^a(\gamma)=\exp\left(-i\int\limits_0^1 a_\mu(\gamma(t))\,\dot\gamma^\mu(t)\,dt\right),\quad \gamma\in W_0^{2,1}([0,1],\mathbb{R}^d).$$

Предложение 1. Если $u,\,v\in W_0^{2,1}([0,1],\mathbb{R}^d)$, причем $u(1)=v(1)=0$, то верны равенства:

$$\partial_u U^a(\gamma)=-iU^a(\gamma)\int\limits_0^1 f_{\mu\nu}(\gamma(t))\,u^\mu(t)\,\dot\gamma^\nu(t)\,dt,\tag{3}$$

$$\begin{aligned}\partial_u\partial_v U^a(\gamma)=-U^a(\gamma)\left(\int\limits_0^1 f_{\mu\nu}(\gamma(t))\,u^\mu(t)\,\dot\gamma^\nu(t)\,dt\right)\left(\int\limits_0^1 f_{\lambda\kappa}(\gamma(t))\,v^\lambda(t)\,\dot\gamma^\kappa(t)\,dt\right)-\\-iU^a(\gamma)\left(\frac12\int\limits_0^1\big(\partial_\lambda f_{\mu\nu}(\gamma(t))+\partial_\mu f_{\lambda\nu}(\gamma(t))\big)u^\mu(t)\,v^\lambda(t)\,\dot\gamma^\nu(t)\,dt+\right.\\\left.+\frac12\int\limits_0^1 f_{\mu\nu}(\gamma(t))(u^\mu(t)\dot v^\nu(t)+v^\mu(t)\dot u^\nu(t))\,dt\right),\end{aligned}\tag{4}$$

где производная берется в смысле Фреше.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\gamma,\ u \in W_0^{2,1}([0,1],\mathbb{R}^d)$, то

$$\partial_u U^a(\gamma) = U^a(\gamma)\Bigg(-i\int\limits_0^1 a_\mu(\gamma(t))\,\dot u^\mu(t)\,dt - i\int\limits_0^1 \partial_\nu a_\mu(\gamma(t))\,u^\nu(t)\,\dot\gamma^\mu(t)\,dt.\Bigg) \tag{5}$$

Если $u(1)=0$, то при интегрировании по частям, мы получаем (3).

Дифференцируя (3), мы получаем

$$\partial_u\partial_v U^a(\gamma) = -U^a(\gamma)\Bigg(\int\limits_0^1 f_{\mu\nu}(\gamma(t))\,u^\mu(t)\,\dot\gamma^\nu(t)\,dt\Bigg)\Bigg(\int\limits_0^1 f_{\lambda\kappa}(\gamma(t))\,v^\lambda(t)\,\dot\gamma^\kappa(t)\,dt\Bigg) +$$
$$+\,iU^a(\gamma)\Bigg(\int\limits_0^1 \partial_\lambda f_{\mu\nu}(\gamma(t))\,u^\mu(t)\,v^\lambda(t)\,\dot\gamma^\nu(t)\,dt + \int\limits_0^1 f_{\mu\nu}(\gamma(t))\,u^\mu(t)\,\dot v^\nu(t)\,dt\Bigg). \tag{6}$$

Тогда, интегрируя по частям выражение

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f_{\mu\nu}(\gamma(t))\,u^\mu(t)\,\dot v^\nu(t)\,dt$$

и используя тождества Бьянки

$$\partial_\lambda f_{\mu\nu} + \partial_\mu f_{\nu\lambda} + \partial_\lambda f_{\nu\mu} = 0,$$

мы получаем (4).

Обозначим $h_n(t)=\sqrt{2}\sin n\pi t$ и $l_n(s,t)=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} h_k(s)\,h_k(t)$. Заметим, что

$$\lim_{n\to\infty} l_n(s,t) = \begin{cases} 1, & t=s,\ (t,s)\neq(0,0),\ (t,s)\neq(1,1);\\ 0, & \text{иначе},\end{cases} \tag{7}$$

и для всех $n\in\mathbb{N}$, $(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$ выполняется

$$|l_n(s,t)| \le 2. \tag{8}$$

Определение 1. Лапласиан Леви Δ_L — это линейное отображение из пространства $\operatorname{dom}\Delta_L$ в пространство всех $\mathbb{C}$-значных функций на $W_0^{2,1}([0,1],\mathbb{R}^d)$, определенное следующим образом:

$$\Delta_L F(\gamma) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{d} d_{p_\mu h_k} d_{p_\mu h_k} F(\gamma), \tag{9}$$

где $\operatorname{dom}\Delta_{L_2}$ состоит из всех дважды дифференцируемых по Фреше $\mathbb{C}$-значных функций на $W_0^{2,1}([0,1],\mathbb{R}^d)$, для которых правая часть (9) существует для всех $\gamma\in W_0^{2,1}([0,1],\mathbb{R}^d)$.

З а м е ч а н и е 1. Предыдущее определение является частным случаем определения лапласиана Леви в пространствах функций на оснащенных гильбертовых пространствах (см. [1]), так как $W_0^{2,1}([0,1],\mathbb{R}^d)\subset L_2([0,1],\mathbb{R}^d)$ и вектора $\{p_\mu h_k\}$ образуют ортонормированный базис в $L_2([0,1],\mathbb{R}^d)$.

Определение 2. Даламбертиан Леви $\Box_L$ — это линейное отображение из пространства $\operatorname{dom}\Box_L$ в пространство всех $\mathbb{C}$-значных функций на $W_0^{2,1}([0,1],\mathbb{R}^d)$, определенное следующим образом:

$$\Box_L F(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Big(d_{p_1 h_k} d_{p_1 h_k} F(\gamma) - \sum_{\mu=2}^{d} d_{p_\mu h_k} d_{p_\mu h_k} F(\gamma) \Big), \tag{10}$$

где $\operatorname{dom}\Box_L$ состоит из всех дважды дифференцируемых по Фреше $\mathbb{C}$-значных функций F на $W_0^{2,1}([0,1],\mathbb{R}^d)$, для которых правая часть (10) существует для всех $\gamma \in W_0^{2,1}([0,1],\mathbb{R}^d)$.

Предложение 2. Выполняются равенства

$$\Delta_L U^a(\gamma) = -iU^a(\gamma) \int_0^1 \partial_\mu f^\mu_{\ \nu}(\gamma(t))\, \dot\gamma^\nu(t)\, dt;$$

$$\Box_L U^a(\gamma) = -iU^a(\gamma) \int_0^1 \eta^{\lambda\mu}\, \partial_\lambda f_{\mu\nu}(\gamma(t))\, \dot\gamma^\nu(t)\, dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (7) и (8) предложение следует из предложения 1 и теоремы Лебега о мажорируемой сходимости.

В доказательстве следующего предложения и ниже, если $\xi \in W_0^{2,1}([0,1],\mathbb{R}^d)$, то символ ξ^r (где $r \in [0,1]$) обозначает кривую, определенную так:

$$\xi^r(t) = \begin{cases} \xi(t), & t \le r; \\ \xi(r), & t > r. \end{cases}$$

Предложение 3. Следующие два утверждения равносильны:

1) U^a является решением уравнения Лапласа для лапласиана Леви:

$$\Delta_L U^a = 0;$$

2) 1-форма a является решением уравнений Максвелла на евклидовом пространстве:

$$\partial_\mu f^\mu_{\ \nu} = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Delta_L U^a = 0$. Рассмотрим функцию

$$R(r) = \exp\Big(-i \int_r^1 a_\mu(\gamma(s))\, \dot\gamma^\mu(s) \Big) \Delta_L U^a(\gamma^r).$$

Тогда

$$\frac{d}{dr} R(r) = -i\partial_\mu f^\mu_{\ \nu}(\gamma(r))\, \dot\gamma^\nu(r)\, U^a(\gamma).$$

Так как $R(r) \equiv 0$, мы получаем, что для всех $\gamma \in W_0^{2,1}([0,1],\mathbb{R}^d)$ и $r \in [0,1]$ выполняется $\partial_\mu f^\mu_{\ \nu}(\gamma(r))\, \dot\gamma^\nu(r) = 0$. Тогда $\partial_\mu f^\mu_{\ \nu} = 0$. В другую сторону доказательство предложения тривиально.

Предложение 4. Следующие два утверждения равносильны:

1) U^a является решением уравнения Лапласа для даламбертиана Леви:

$$\Box_L U^a = 0;$$

2) потенциал a является решением уравнений Максвелла на пространстве Минковского:

$$\eta^{\lambda\mu}\partial_\lambda f_{\mu\nu} = 0.$$

Доказательство. Доказательство аналогично предыдущему.

2. Стохастический параллельный перенос и его вторая производная

В начале этого раздела мы следуем изложению из статьи [12].

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — каноническое вероятностное пространство, ассоциированное с d-мерным броуновским движением на отрезке $[0,\ 1]$, т.е.

$$\Omega = C_0([0,1], \mathbb{R}^d) := \Big\{\sigma \in C([0,1], \mathbb{R}^4)\colon \sigma(0) = 0\Big\},$$

$\mathcal{F}$ — пополнение борелевской σ-алгебры на $C_0([0,1], \mathbb{R}^d)$ с помощью меры Винера P. Символом $b_t = (b_t^1, \ldots, b_t^d)$ будем обозначать d-мерный винеровский процесс, а символом $(\mathcal{F}_t)$ — порожденный этим процессом возрастающий поток подалгебр $\mathcal{F}$. Пространство $W_0^{2,1}([0,1], \mathbb{R}^d)$ — пространство Камерона — Мартина (пространство дифференцируемости) меры Винера. Символом $\circ db$ будем обозначать стохастический дифференциал Стратоновича, а символом db будем обозначать стохастический дифференциал Ито.

Соболевский класс $W_r^p(P)$ — это пополнение бесконечно гладких цилиндрических функций с компактным носителем на $C_0([0,1], \mathbb{R}^d)$ относительно соболевской нормы

$$\|F\|_{p,r} = \sum_{k=1}^{r}\Bigg(E\Big(\sum_{i_1\ldots i_k=1}^{\infty}(\partial_{e_{i_1}}\ldots\partial_{e_{i_k}}F)^2\Big)^{p/2}\Bigg)^{1/p},$$

где $\{e_n\}$ — ортонормированный базис в $W_0^{2,1}([0,1], \mathbb{R}^d)$. Символ $W_r^\infty(P)$ обозначает проективный предел $\operatorname{proj}\lim\limits_{p\to+\infty} W_r^p(P)$. (О различных определениях соболевских классов относительно меры Винера и их эквивалентности см. например [4] и цитированную там литературу.)

Оператор ∂_h замыкаем в $W_1^p(P)$ при $p \geq 1$. Будем обозначать это замыкание снова символом ∂_h или символом $D^{\dot h}$. Если $F \in W_1^p(P)$, где $p \geq 1$, то $D_t F = (D_t^1 F, \ldots, D_t^d F)$ — случайный процесс, определяемый почти всюду по мере $\lambda \times P$, где λ — мера Лебега на отрезке $[0,\ 1]$, формулой $D^{\dot h}F = \partial_h F = \int\limits_0^1 (D_t F, \dot h(t))_{\mathbb{R}^d}dt$ для всех $h \in W_0^{2,1}([0,1], \mathbb{R}^d)$. Старшие производные для $F \in W_1^p(P)$ определяются по аналогии.

Мы считаем, что a_μ ограничены со всеми производными до третьего порядка включительно константой $C > 0$, т.е.

$$\sup\Big(|a_\mu(x)|,\ |\partial_\nu a_\mu(x)|,\ |\partial_\lambda\partial_\nu a_\mu(x)|,\ |\partial_\kappa\partial_\lambda\partial_\nu a_\mu(x)|\Big) < C.$$

Стохастический параллельный перенос $U^{a,x}(b,t)$, порожденный a, — случайный процесс, определенный формулой

$$U^{a,x}(b,t) = \exp\left(-i\int_0^t a_\mu(x+b_s)\circ db_s^\mu\right).$$

Предложение 5. Выполняется $U^{a,x}(b,1)\in W_2^\infty(P)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$. Если $u,\ v\in W_0^{2,1}([0,1],\mathbb{R}^d)$ и $u(1)=v(1)=0$, то выполняется равенство

$$\begin{aligned}\partial_u\partial_v U^{a,x}(b,1) = -U^{a,x}(b,1)\left(\int_0^1 f_{\mu\nu}(x+b_t)\,u^\mu(t)\circ db_t^\nu\right)\left(\int_0^1 f_{\lambda\kappa}(x+b_t)\,v^\lambda(t)\circ db_t^\kappa\right) - \\ - iU^{a,x}(b,1)\left(\frac12\int_0^1(\partial_\nu f_{\mu\lambda}(x+b_t)+\partial_\mu f_{\nu\lambda}(x+b_t))u^\mu(t)\,v^\nu(t)\circ db_t^\lambda - \right.\\ \left. -\frac12\int_0^1 f_{\mu\nu}(x+b_t)\,(\dot u^\mu(t)v^\nu(t)+\dot v^\mu(t)u^\nu(t))\,dt\right).\end{aligned}\tag{11}$$

Доказательство. Рассмотрим случайный процесс

$$Z^{a,x}(b,t) = \int_0^t a_\mu(x+b_t)\circ db_t^\mu.$$

В силу леммы 1.3.4 из [9] $Z^{a,x}(b,1)\in W_2^1(P)$ и выполняется равенство

$$D_t^\mu Z^{a,x}(b,1) = a_\mu(x+b_t) + \int_t^1 \partial_\mu a_\nu(x+b_r)\circ db_r^\nu.\tag{12}$$

В силу ограниченности a и ее первых и вторых производных $D_t^\mu Z^{a,x}(b,1)\in L_p(P)$ для всех $p>1$. Тогда в силу предложения 1.5.5 из [9] $Z^{a,x}(b,1)\in W_1^\infty(P)$. Получаем

$$\begin{aligned}D^{\dot u}Z^{a,x}(b,1) = \partial_u Z^{a,x}(b,1) = \int_0^1 D_t^\mu Z^{a,x}(b,1)\,\dot u^\mu(t)dt = \\ = \int_0^1\left(a_\mu(x+b_t)+\int_t^1\partial_\mu a_\nu(x+b_r)\circ db_r^\nu\right)\dot u^\mu(t)dt\end{aligned}$$

По формуле Ито

$$D^{\dot u}Z^{a,x}(b,1) = \int_0^1 f_{\mu\nu}(x+b_t)\,u^\mu(t)\circ db_t^\nu.\tag{13}$$

Так как $U^{a,x}(b,t) = e^{-iZ^{a,x}(b,t)}$, в силу предложения 1.2.3. из [9] мы получаем $U^{a,x}(b,t)\in$ $\in W_1^\infty(P)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ и

$$D^{\dot u}U^{a,x}(b,1) = -iU^{a,x}(b,1)D^{\dot u}Z^{a,x}(b,1).$$

Так мы получили

$$\begin{aligned}\partial_u U^{a,x}(b,1) = -iU^{a,x}(b,1)\int_0^1 f_{\mu\nu}(x+b_t)\,u^\mu(t)\circ db_t^\nu = \\ = -iU^{a,x}(b,1)\left(\int_0^1 f_{\mu\nu}(x+b_t)\,u^\mu(t)db_t^\nu + \frac12\int_0^1\partial_\nu f_\mu{}^\nu(x+b_t)\,u^\mu(t)\,dt\right).\end{aligned}\tag{14}$$

В силу леммы 1.3.4 из [9] $Z^{a,x}(b,1) \in W_2^1(P)$ и выполняется равенство

$$D_s^\nu D_t^\mu Z^{a,x}(b,1) = \partial_\nu a_\mu(x+b_t)\,\mathrm{Ind}_{s\le t} + \int\limits_{\max(s,t)}^{1} \partial_\mu \partial_\nu a_\lambda(x+b_r) \circ db_r^\lambda. \tag{15}$$

В силу ограниченности a, ее первых, вторых и третьих производных $D_s^\nu D_t^\mu Z^{a,x}(b,1) \in L_p(P)$ для всех $p>1$. Тогда в силу предложения 1.5.5 из [9] мы получаем $Z^{a,x}(b,1) \in W_2^\infty(P)$.

Рассмотрим случайный процесс

$$L^{x,u}(b,t) = \int\limits_0^t f_{\mu\nu}(x+b_r)\,u^\mu(r) \circ db_r^\nu.$$

Тогда

$$D^{\dot v} D^{\dot u} U^{a,x}(b,1) = -U^{a,x}(b,1)\,D^{\dot v} Z^{a,x}(b,1)\,D^{\dot u} Z^{a,x}(b,1) - iU^{a,x}(b,1)\,D^{\dot v} L^{x,u}(b,1). \tag{16}$$

В силу леммы 1.3.4 из [9]

$$D_t^\nu L^{x,u}(b,1) = f_{\mu\nu}(x+b_t)\,u^\mu(t) + \int\limits_t^1 \partial_\nu f_{\mu\lambda}(x+b_r)\,u^\mu(r) \circ db_r^\lambda.$$

Заметим, что по формуле Ито выполняется

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f_{\mu\nu}(x+b_t)\,u^\mu(t)\,\dot v^\nu(t)\,dt = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \partial_\lambda f_{\mu\nu}(x+b_t)\,u^\mu(t)\,v^\nu(t) \circ db_t^\lambda - \\ - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f_{\mu\nu}(x+b_t)\,\dot u^\mu(t) v^\nu(t)\,dt. \tag{17}$$

Тогда, используя (17) и тождества Бьянки, мы получаем

$$D^{\dot v} L^u(b,1) = \int\limits_0^1 \left(f_{\mu\nu}(x+b_t)\,u^\mu(t) + \int\limits_t^1 (\partial_\nu f_{\mu\lambda}(x+b_r)\,u^\mu(r) \circ db_r^\lambda) \dot v^\nu(t) \right) dt = \\ = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f_{\mu\nu}(x+b_t)\,u^\mu(t)\,\dot v^\nu(t)\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \partial_\lambda f_{\mu\nu}(x+b_t)\,u^\mu(t)\,v^\nu(t) \circ db_t^\lambda - \\ - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f_{\mu\nu}(x+b_t)\,\dot u^\mu(t)\,v^\nu(t)\,dt + \int\limits_0^1 \partial_\nu f_{\mu\lambda}(x+b_t)\,u^\mu(t)\,v^\nu(t) \circ db_t^\lambda = \\ = \Bigg(\frac{1}{2}\int\limits_0^1 (\partial_\nu f_{\mu\lambda}(x+b_t) + \partial_\mu f_{\nu\lambda}(x+b_t))\,u^\mu(t)\,v^\nu(t) \circ db_t^\lambda + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f_{\mu\nu}(x+b_t)(u^\mu(t)\dot v^\nu(t) + v^\mu(t)\,\dot u^\nu(t))\,dt \Bigg). \tag{18}$$

Из равенств (13), (16) и (18) мы получаем (11).

З а м е ч а н и е 2. Заметим, что в силу (12) и (15)

$$\sum_{\mu=1}^{d}\int_0^1 D_t^{\mu}D_t^{\mu}U^{a,x}(b,1)dt =$$

$$= -i\int_0^1\Big(\int_0^t \partial_\nu(\operatorname{div} a)(x+b_t)\circ db_r^\nu + \int_t^1 \Delta a_\nu(x+b_r)\circ db_r^\nu\Big)dtU^{a,x}(b,1) -$$

$$-\sum_{\mu=1}^{d}\int_0^1\Big(\Big(\int_0^t \partial_\nu a_\mu(x+b_r)\circ db_r^\nu + \int_t^1 \partial_\mu a_\nu(x+b_r)\circ db_r^\nu\Big)^2\Big)dtU^{a,x}(b,1). \quad (19)$$

Это равенство означает, что стохастический параллельный перенос лежит в области определения лапласиана Гросса — Вольтерры. Значение этого оператора на стохастическом параллельном переносе равно (19).

3. Вспомогательные леммы

В этом разделе получены некоторые технические результаты, которые используются в доказательствах теорем из следующего раздела.

Лемма 1. Пусть h_μ, m_μ — согласованные ограниченные процессы. Пусть

$$R_n(b) = \int_0^1\Big(\int_0^t h_\mu(b,s)l_n(s,t)db_s^\mu\Big)m_\nu(b,t)\,db_t^\nu.$$

Тогда в $L_2(P)$ выполняется

$$\lim_{n\to\infty} R_n(b) = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть всюду $|h_\mu(b,t)| \le K$ и $|m_\mu(b,t)| \le K$. В силу теоремы Фубини

$$\|R_n(b)\|_2^2 = E\Big(\Big(\int_0^1\Big(\int_0^t h_\mu(b,s)\,l_n(s,t)\,db_s^\mu\Big)m_\nu(b,t)db_t^\nu\Big)^2\Big) =$$

$$= E\Big(\int_0^1\Big(\Big(\int_0^t h_\mu(b,s)\,l_n(s,t)\,db_s^\mu\Big)^2 m^\nu(b,t)\,m_\nu(b,t)\Big)dt\Big) =$$

$$= \int_0^1 E\Big(\int_0^t h_\mu(b,s)\,l_n(s,t)\,db_s^\mu\Big)^2 m^\nu(b,t)\,m_\nu(b,t)\,dt.$$

Тогда

$$\|R_n(b)\|_2^2 \le dK^2\int_0^1 E\Big(\int_0^t h_\mu(b,s)\,l_n(s,t)\,db_s^\mu\Big)^2 dt =$$

$$= dK^2\int_0^1\int_0^t Eh_\mu(b,s)\,h^\mu(b,s)\,l_n^2(s,t)\,dsdt \le d^2K^4\int_0^1\int_0^t l_n^2(s,t)\,dsdt.$$

Поэтому утверждение леммы в силу (7) и (8) следует из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости.

Лемма 2. Пусть m_μ, k — согласованные ограниченные процессы. Пусть

$$R_n(b) = \int\limits_0^1 \Bigl(\int\limits_0^t k(b,s)\, l_n(s,t)\, ds\Bigr) m_\nu(b,t)\, db_t^\nu.$$

Тогда в $L_2(P)$ выполняется

$$\lim_{n\to\infty} R_n(b) = 0.$$

Доказательство. Пусть всюду $|m_\mu(b,t)| \le K$ и $|k(b,t)| \le K$. В силу теоремы Фубини

$$\|R_n(b)\|_2^2 = E\Biggl(\Bigl(\int\limits_0^1 \Bigl(\int\limits_0^t k(b,s)\, l_n(s,t)\, ds\Bigr) m_\nu(b,t) db_t^\nu\Bigr)^2\Biggr) =$$

$$= E\Biggl(\int\limits_0^1 \Bigl(\int\limits_0^t k(b,s)\, l_n(s,t) ds\Bigr)\Bigl(\int\limits_0^t k(b,s)\, l_n(s,t)\, ds\Bigr) m^\nu(b,t)\, m_\nu(b,t)\, dt\Biggr) =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^t \int\limits_0^t l_n(s_1,t)\, l_n(s_2,t) E(k(b,s_1)\, k(b,s_2) m^\nu(b,t)\, m_\nu(b,t))\, ds_1 ds_2 dt.$$

Утверждение леммы в силу (7) и (8) следует из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости.

Лемма 3. Пусть m_μ, k — согласованные ограниченные процессы. Пусть

$$R_n(b) = \int\limits_0^1 \Bigl(\int\limits_0^t m_\mu(b,s)\, l_n(s,t)\, db_s^\mu\Bigr) k(b,t)\, dt.$$

Тогда в $L_2(P)$ выполняется

$$\lim_{n\to\infty} R_n(b) = 0.$$

Доказательство. См. доказательство леммы 1 в [12].

Лемма 4. Пусть r, k — согласованные ограниченные процессы. Пусть

$$R_n(b) = \int\limits_0^1 \Bigl(\int\limits_0^t r(b,s)\, l_n(s,t)\, ds\Bigr) k(b,t)\, dt.$$

Тогда в $L_2(P)$ выполняется

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

Доказательство. По теореме Фубини

$$\|R_n(b)\|_2^2 = E\Biggl(\Bigl(\int\limits_0^1 \Bigl(\int\limits_0^t r(b,s)\, l_n(s,t)\, ds\Bigr) k(b,t)\, dt\Bigr)^2\Biggr) =$$

$$= E\Biggl(\Bigl(\int\limits_0^1 \Bigl(\int\limits_0^{t_1} r(b,s_1)\, l_n(s_1,t_1)\, ds_1\Bigr)\Bigl(\int\limits_0^{t_1} r(b,s_2)\, l_n(s_2,t_2)\, ds_2\Bigr) k(b,t_1)\, k(b,t_2)\, dt_1 dt_2\Bigr)\Biggr) =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_0^{t_1} \int\limits_0^{t_2} l_n(s_1,t_1)\, l_n(s_2,t_2)\, E\Bigl(r(b,s_1)\, r(b,s_2)\, k(b,t_1)\, k(b,t_2)\Bigr) ds_1 ds_2 dt_1 dt_2.$$

Тогда утверждение леммы в силу (7) и (8) следует из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости.

4. Стохастические лапласиан Леви и даламбертиан Леви

Определение 3. Стохастический лапласиан Леви Δ_L — линейный оператор из $\mathrm{dom}\,\Delta_L$ в $L_2(P)$, определенный формулой

$$\Delta_L F = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{d} \partial_{p_\mu h_k} \partial_{p_\mu h_k} F, \tag{20}$$

где ряд сходится в $L_2(P)$, а областью определения $\mathrm{dom}\,\Delta_L$ являются все $F \in W_2^2(P) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, для которых правая часть (20) существует.

Определение 4. Стохастический даламбертиан Леви $\Box_L$ — линейный оператор из $\mathrm{dom}\,\Box_L$ в $L_2(P)$, определенный формулой

$$\Box_L F = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Big(\partial_{p_1 h_k} \partial_{p_1 h_k} F - \sum_{\mu=2}^{d} \partial_{p_\mu h_k} \partial_{p_\mu h_k} F \Big), \tag{21}$$

где ряд сходится в $L_2(P)$, а областью определения $\mathrm{dom}\,\Box_L$ являются все $F \in W_2^2(P) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, для которых правая часть (21) существует.

Теорема 1. Выполняется равенство

$$\Delta_L U^{a,x}(b,1) = -U^{a,x}(b,1) \Big(\int_0^1 f_{\mu\nu}(x+b_t)\, f^{\mu\nu}(x+b_t)\, dt + i \int_0^1 \partial_\mu f^\mu_{\ \nu}(x+b_t) \circ db^\nu_t \Big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначения

$$R^{a,x}_n(b) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{d} \partial_{p_\mu h_k} \partial_{p_\mu h_k} U^{a,x}(b)$$

и

$$R^{a,x}(b) = U^{a,x}(b) \Big(\int_0^1 f_{\mu\nu}(x+b_t)\, f^{\mu\nu}(x+b_t)\, dt + i \int_0^1 \partial_\mu f^\mu_{\ \nu}(x+b_t) \circ db^\nu_t \Big).$$

Из предложения 5 следует, что выполняется равенство

$$\begin{aligned} \|R^{a,x} - R^{a,x}_n\|_2 = \Bigg(E \Bigg(\int_0^1 f_{\mu\nu}(x+b_t)\, f^{\mu\nu}(x+b_t)\,(1 - l_n(t,t))\, dt \,+ \\ + \int_0^1 \Big(\int_0^t f_{\mu\lambda}(x+b_s)\, l_n(s,t) \circ db^\lambda_s \Big) f^\mu_{\ \nu}(x+b_t)\, db^\nu_t \,+ \\ + \frac{1}{2} \int_0^1 \Big(\int_0^t f_{\mu\lambda}(x+b_s)\, l_n(s,t) \circ db^\lambda_s \Big) \partial_\nu f^{\mu\nu}(x+b_t)\, dt \Bigg)^2 + \\ + E \Big(\int_0^1 \partial_\mu f^\mu_{\ \nu}(x+b_t)\,(1 - l_n(t,t)) \circ db^\nu_t \Big)^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{22}$$

Из леммы 1 и леммы 2 следует, что

$$\lim_{n\to\infty} E \Big(\int_0^1 \Big(\int_0^t f_{\mu\lambda}(x+b_s)\, l_n(s,t) \circ db^\lambda_s \Big) f^\mu_{\ \nu}(x+b_t)\, db^\nu_t \Big)^2 = 0.$$

Из леммы 3 и леммы 4 следует, что

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^t f_{\mu\lambda}(x+b_s)\, l_n(s,t)\circ db_s^\lambda\right)\partial_\nu f^{\mu\nu}(x+b_t)\, dt\right)^2 = 0.$$

В силу теоремы Лебега

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\int\limits_0^1 f_{\mu\nu}(x+b_t)\, f^{\mu\nu}(x+b_t)\,(1-l_n(t,t))\, dt\right)^2 = 0$$

и

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\int\limits_0^1 \partial_\mu f^\mu_{\ \nu}(x+b_t)\,(1-l_n(t,t))\circ db_t^\nu\right)^2 = 0.$$

Тогда в силу неравенства Минковского $\lim\limits_{n\to\infty}\|R^{a,x}-R_n^{a,x}\|_2 = 0$.

Теорема 2. Выполняется равенство

$$\Box_L U^{a,x}(b,1) = -U^{a,x}(b,1)\left(\int\limits_0^1 \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\kappa} f_{\mu\nu}(x+b_t)\, f_{\lambda\kappa}(x+b_t)\, dt + i\int\limits_0^1 \eta^{\mu\lambda}\partial_\mu f_{\lambda\nu}(x+b_t)\circ db_t^\nu\right).$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Теорема доказана.

Аналогично теореме 2 и 3 из [12] можно доказать следующие утверждения.

Предложение 6. Следующие условия равносильны:

1) $\partial_\mu f^\mu_{\ \nu} = 0$;

2) для некоторого $x\in\mathbb{R}^d$

$$\Delta_L U^{a,x}(b,1) = -U^{a,x}(b,1)\left(\int\limits_0^1 f_{\mu\nu}(x+b_t) f^{\mu\nu}(x+b_t)\, dt\right).$$

.

Предложение 7. Следующие условия равносильны:

1) $\eta^{\lambda\mu}\partial_\lambda f_{\mu\nu} = 0$;

2) для некоторого $x\in\mathbb{R}^d$

$$\Box_L U^{a,x}(b,1) = -U^{a,x}(b,1)\left(\int\limits_0^1 \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\kappa} f_{\mu\nu}(x+b_t)\, f_{\lambda\kappa}(x+b_t)\, dt\right) = 0.$$

Заключение

В настоящей работе определения лапласиана Леви и даламбертиана Леви с помощью чезаровских средних вторых производных переносятся на стохастический случай. В отличие от детерминированного случая и в отличие от случая стохастического лапласиана Леви, определенного в [8] как интегральный функционал, заданный специальным видом второй производной, теорема о связи с калибровочными полями не выполняется: значение лапласиана Леви (даламбертиана Леви) на стохастическом параллельном переносе не равно нулю, если соответствующая связность является решением уравнений Максвелла без источника на евклидовом пространстве (пространстве Минковского). Тем не менее в предыдущей нашей статье [12] показано, что подход, основанный на чезаровском усреднении можно использовать для описания решений уравнений Макселла и в стохастическом случае. А именно, эти уравнения эквивалентны линейному уравнению, содержащую стохастическую дивергенцию Леви, на бесконечномерную 1-форму, порожденную стохастическим параллельным переносом.

На данный момент неизвестно, существует ли формула, связывающая стохастический лапласиан Леви, введенный в настоящей работе, и стохастический лапласиан Леви, введенный в работе [8]. Можно предположить, что результаты, представленные в статье, обобщаются на некоммутативный случай полей Янга — Миллса.

Список литературы

1. Аккарди Л., Смолянов О.Г. Операторы Лапласа — Леви в пространствах функций на оснащенных гильбертовых пространствах // Математические заметки. 2002. Т. 72, № 1, С. 145–150.

2. Аккарди Л., Смолянов О.Г. Формулы Фейнмана для эволюционных уравнений с лапласианом Леви на бесконечномерных многообразиях // Доклады Академии наук. 2006. Т. 407, № 5. С. 1–6.

3. Арефьева И.Я., Волович И.В. Функциональные высшие законы сохранения в калибровочных теориях // Обобщенные функции и их применения в математической физике. Тр. Междунар. конф., ВЦ АН СССР, М., 1981. С. 43–49.

4. Богачев В.И. Гауссовские меры. М.: Наука, 1997. 352 с.

5. Accardi L., Gibilisco P., Volovich I.V. Yang-Mills gauge fields as harmonic functions for the Levy-Laplacians // Russ. J. Math. Phys. 1994. Vol. 2, no. 2. P. 235–250.

6. Accardi L., Gibilisco P., Volovich I.V. The Lévy Laplacian and the Yang-Mills equations // Rendiconti Lincei. 1993. Vol. 4, no. 3. P. 201–206. DOI: 10.1007/BF03001574

7. Леви П. Конкретные проблемы функционального анализа. М: Наука, 1967. 512 с.

8. Leandre R., Volovich I.V. The Stochastic Levy Laplacian and Yang-Mills equation on manifolds // Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. 2001. Vol. 4, no. 2. P. 151–172. DOI: 10.1142/S0219025701000449

9. Nualart D. The Malliavin calculus and related topics. 2$^{\text{nd}}$ ed. Berlin: Springer-Verlag, 2006. 382 p.

10. Volkov B.O. Lévy-Laplacian and the Gauge Fields // Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. 2012. Vol. 15, no. 4. Art. no. 1250027. DOI: 10.1142/S0219025713500276

11. Волков Б.О. Даламбертианы Леви и их применение в квантовой теории // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 19, № 2. С. 241–258. DOI: 10.14498/vsgtu1372

12. Волков Б.О. Стохастическая дивергенция Леви и уравнения Максвелла // Математика и математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 5. С. 1-16. DOI: 10.7463/mathm.0515.0820322

Mathematics & Mathematical Modelling

Electronic journal of the Bauman MSTU

http://mathmjournal.ru

Mathematics and Mathematical Modelling of the Bauman MSTU, 2015, no. 6, pp. 1–16.

DOI: **10.7463/mathm.0615.0822138**

Received: 09.11.2015

Stochastic Lévy Laplacian and d'Alambertian and Maxwell's equations

Volkov B. O.[1,*]

[*]borisvolkov1986@gmail.com

[1]Bauman Moscow State Technical University, Russia
[2]Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow, Russia

Keywords: Maxwell's equations, Levy Laplacian, stochastic parallel transport, Levy d'Alambertian

One of the main reasons for interest in the Levy Laplacian and its analogues such as Levy d'Alembertian is a connection of these operators with gauge fields. The theorem proved by Accardi, Gibillisco and Volovich stated that a connection in a bundle over a Euclidean space or over a Minkowski space is a solution of the Yang-Mills equations if and only if the corresponding parallel transport to the connection is a solution of the Laplace equation for the Levy Laplacian or of the d'Alembert equation for the Levy d'Alembertian respectively (see [5, 6]). There are two approaches to define Levy type operators, both of which date back to the original works of Levy (see [7]). The first is that the Levy Laplacian (or Levy d'Alembertian) is defined as an integral functional generated by a special form of the second derivative. This approach is used in the works [5, 6], as well as in the paper [8] of Leandre and Volovich, where stochastic Levy-Laplacian is discussed. Another approach to the Levy Laplacian is defining it as the Cesaro mean of second order derivatives along the family of vectors, which is an orthonormal basis in the Hilbert space. This definition of the Levy Laplacian is used for the description of solutions of the Yang-Mills equations in the paper [10].

The present work shows that the definitions of the Levy Laplacian and the Levy d'Alembertian based on Cesaro averaging of the second order directional derivatives can be transferred to the stochastic case. In the article the values of these operators on a stochastic parallel transport associated with a connection (vector potential) are found. In this case, unlike the deterministic case and the stochastic case of Levy Laplacian from [8], these values are not equal to zero if the vector potential corresponding to the stochastic parallel transport is a solution of the Maxwell's equations. As a result, two approaches to definition of the Levy Laplacian in the stochastic case give different operators. This situation is different from the flat deterministic case, which is discussed in [11].

It can be expected that the work can be summarized in the non-commutative case of the Yang-Mills theory.

References

1. Аккарди Л., Смолянов О.Г. Операторы Лапласа — Леви в пространствах функций на оснащенных гильбертовых пространствах // Математические заметки. 2002. Т. 72, № 1, С. 145–150.
2. Accardi L., Smolyanov O.G. Feynman formulas for evolution equations with Levy Laplacians on infinite-dimensional manifolds. Dokladi Akademii nauk, 2006, vol. 407, no. 5, pp. 1–6. (English version of journal: Doclady Mathematics, 2006, vol. 73, no. 2, pp. 252–257.)
3. Aref'eva I.Ya., Volovich I.V. Higher order functional conservation laws in gauge theories. *Proc. Int. Conf. Generalized Functions and their Applications in Mathematical Physics*, Moscow, Academy of Sciences of the USSR, 1981, pp. 43–49. (in Russian)
4. Bogachev V.I. *Gaussian measures*. American Mathematical Society, Rhose Island, 1998. (Russ. ed.: Bogachev V.I. *Gaussovskie mery*. Moscow, Nauka publ., 1997. 352 p).
5. Accardi L., Gibilisco P., Volovich I.V. Yang-Mills gauge fields as harmonic functions for the Levy-Laplacians. *Russ. J. Math. Phys.*, 1994, vol. 2, no. 2, pp. 235–250.
6. Accardi L., Gibilisco P., Volovich I.V. The Lévy Laplacian and the Yang-Mills equations. *Rendiconti Lincei*, 1993, vol. 4, no. 3, pp. 201–206. DOI: 10.1007/BF03001574
7. P. Lévy. *Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle*. Paris, Gautier-Villars, 1951. (Russ. ed.: P. Lévy. *Konkretnye problemy funktsional'nogo analiza*. Moscow, Nauka publ., 1967, 512 p.)
8. Leandre R., Volovich I.V. The Stochastic Levy Laplacian and Yang-Mills equation on manifolds. *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, 2001, vol. 4, no. 2, pp. 151–172. DOI: 10.1142/S0219025701000449
9. Nualart D. *The Malliavin calculus and related topics. 2nd ed*. Berlin, Springer-Verlag, 2006. 382 p.
10. Volkov B.O. Lévy-Laplacian and the Gauge Fields. *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, 2012, vol. 15, no. 4, art. no. 1250027. DOI: 10.1142/S0219025713500276
11. Volkov B.O. Lévy d'Alambertians and their application in the quantum theory. *Vestnik Samarskogo Gos. Tekhn. Univ. = Bulletin of Samarskii State Techn. Univ.*, 2015, vol. 19, no. 2, pp. 241–258. DOI: 10.14498/vsgtu1372 (in Russian).
12. Volkov B.O. Stochastic Levy Divergence and Maxwell's Equations.
Стохастическая дивергенция Леви и уравнения Максвелла // *Matematika i matematicheskoe modelirovanie. MGTU im. N.E. Baumana = Mathematics and mathematical modelling of the Bauman MSTU*, 2015, no 5, p. 1-16. DOI: 10.7463/mathm.0515.0820322 (in Russian).