Математика и Математическое моделирование
Сетевое издание
МГТУ им. Н.Э. Баумана
http://mathmjournal.ru

Ссылка на статью:
// Математика и математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 5. С. 17–27.
DOI: 10.7463/mathm.0515.0816614
Представлена в редакцию: 29.09.2015

УДК 517.938+517.938.5

Исследование динамической системы взаимосвязанных осцилляторов Рёсслера

Стырт О. Г.[1,*]

[*]oleg_styrt@mail.ru

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

В работе исследована динамическая система взаимосвязанных осцилляторов Рёсслера. Найдены положения равновесия для систем не более двух осцилляторов. Кроме того, построено локализирующее множество для инвариантных компактов при произвольных значениях параметров. Ранее данная система рассматривалась на предмет затухания осцилляторов. Имеется два вида затуханий: однородное устойчивое состояние и неоднородное устойчивое состояние. Переход из первого во второе может повлечь болезнь в биологической структуре, дефект в единой энергосистеме, а также использоваться для предотвращения распространения эпидемий.

Ключевые слова: динамическая система; локализация; инвариантный компакт; осциллятор

Введение

В работе [1] проведено исследование динамической системы N взаимосвязанных осцилляторов Ресслера ($p = 0, \ldots, N$)

$$\begin{cases} \dot{x}_l = -y_l - z_l + \dfrac{\varepsilon}{N}\sum\limits_{j=1}^{N}(x_j - x_l) & (l = 1, \ldots, N); \\ \dot{y}_l = x_l + ay_l & (l = p+1, \ldots, N); \\ \dot{y}_l = x_l + ay_l - \varepsilon(y_l + y_N) & (l = 1, \ldots, p); \\ \dot{z}_l = bx_l + z_l(x_l - c) & (l = 1, \ldots, N) \end{cases} \tag{1}$$

на предмет затухания. Имеется два вида затуханий: однородная устойчивая стадия (HSS) и неоднородная устойчивая стадия (IHSS). Переход из HSS в IHSS может повлечь болезнь в биологической структуре [2], дефект в единой энергосистеме [3], а также использоваться для предотвращения распространения эпидемий [4].

В данной работе рассмотрен частный случай системы (1), в которой нет связи отдельных подсистем по переменной y, т. е. $p = 0$. При этом система (1) приобретает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_l = -y_l - z_l + \dfrac{\varepsilon}{N}\sum\limits_{j=1}^{N}(x_j - x_l); \\ \dot{y}_l = x_l + ay_l; \\ \dot{z}_l = bx_l + z_l(x_l - c) \end{cases} \quad (l = 1, \ldots, N). \tag{2}$$

Внимание уделено исследованию положений равновесия и задаче локализации инвариантных компактных множеств. Статья организована следующим образом. В разд. 2 исследуются положения равновесия системы (2) в случаях $N = 1$ и $N = 2$, в разд. 3 предложено решение задачи локализации.

1. Функциональный метод локализации

Для локализации инвариантных компактов использован метод, представленный в работе [5]. Его суть такова.

Рассмотрим динамическую систему

$$\dot{x} = f(x), \tag{3}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, а $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — бесконечно гладкое отображение.

Подмножество $G \subset \mathbb{R}^n$ называют инвариантным множеством системы (3), если для любой точки $x_0 \in G$ траектория $x(t, x_0)$ системы (3), проходящая через точку x_0, целиком содержится в G. Нас интересуют компактные подмножества в $\mathbb{R}^n$, являющиеся инвариантными для системы (3), или, для краткости, инвариантные компакты, а также локализирующие множества — подмножества в $\mathbb{R}^n$, содержащие все инвариантные компакты. Более точно, исследуется задача поиска локализирующих множеств, т. е. локализации инвариантных компактов.

Пусть $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — бесконечно гладкая функция, а $L_f\varphi := \sum\limits_{i=1}^{n} f_i \dfrac{\varphi}{x_i} = (f,\ \nabla\varphi)$ — производная Ли функции φ по векторному полю f. Подмножество $\{x \in \mathbb{R}^n\colon L_f\varphi(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ будем обозначать через S_φ и называть универсальным сечением. Положим $\varphi_{\sup} := \sup\{\varphi(x)\}_{x \in S_\varphi}$ и $\varphi_{\inf} := \inf\{\varphi(x)\}_{x \in S_\varphi}$. Тогда все инвариантные компакты системы (3) содержатся в подмножестве $\{x \in \mathbb{R}^n\colon \varphi_{\inf} \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi_{\sup}\} \subset \mathbb{R}^n$ — другими словами, указанное подмножество является локализирующим для системы (3) (см. [6, теорема 1.7]). Рассмотренная выше функция φ называется локализирующей.

Задача локализации инвариантных компактов изучалась для динамических систем некоторых специальных видов в работах [7, 8, 9, 10, 11].

2. Положения равновесия

Исследование положений равновесия начнем в частном случае $N = 1$.

Для удобства индекс у переменных x, y, z будет опущен.

Система (2) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z; \\ \dot{y} = x + ay; \\ \dot{z} = bx + z(x - c). \end{cases}$$

Система уравнений для положений равновесия выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} -y - z = 0; \\ x + ay = 0; \\ bx + z(x - c) = 0. \end{cases}$$

Первое и второе уравнения системы позволяют выразить переменные x и y через z, что приводит к квадратному уравнению относительно z: $baz + z(az - c) = 0$ — что равносильно, $az^2 + (ba - c)z = 0$. Решение полученного уравнения зависит от параметров: если $a \neq 0$, то $z = 0$ либо $z = \dfrac{c}{a} - b$, если $a = 0 \neq c$, то $z = 0$, если же $a = c = 0$, то число z может быть любым. Таким образом,

• если $a \neq 0$ и $c \neq ab$, система имеет два положения равновесия: $\left(c - ab,\ b - \dfrac{c}{a},\ \dfrac{c}{a} - b\right)$ и $(0, 0, 0)$;

• если $a \neq 0$ и $c = ab$, а также если $a = 0 \neq c$, то система имеет единственное положение равновесия $(0, 0, 0)$;

• если $a = c = 0$, то система имеет бесконечно много положений равновесия, составляющих в $\mathbb{R}^3$ прямую $x = az$, $y = -z$.

Теперь исследуем положения равновесия в частном случае $N = 2$.

Система уравнений для положений равновесия имеет вид

$$\begin{cases} -y_1 - z_1 + \varepsilon\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2} - x_1\right) = 0; \\ -y_2 - z_2 + \varepsilon\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2} - x_2\right) = 0; \\ x_1 + ay_1 = 0; \\ x_2 + ay_2 = 0; \\ bx_1 + z_1(x_1 - c) = 0; \\ bx_2 + z_2(x_2 - c) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Данная система при $a = 0 \neq c$ имеет единственное решение $x_l = y_l = z_l = 0$ ($l = 1, 2$), а при $a = c = 0$ эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_l = 0; \\ y_l + z_l = 0 \end{cases} \qquad (l = 1,\ 2). \tag{5}$$

Значит, при $a = 0 \neq c$ система (2) имеет единственное положение равновесия $x_l = y_l = {}$ $= z_l = 0$ ($l = 1,\ 2$), а при $a = c = 0$ она имеет бесконечно много положений равновесия, составляющих в $\mathbb{R}^6$ двумерную плоскость, задаваемую уравнениями (5).

Осталось разобрать случай $a \neq 0$.

Утверждение 1. Пусть $a \neq 0$. Тогда положения равновесия системы (2) задаются равенствами

$$x_1 = s + d, \quad x_2 = s - d, \quad y_l = -\frac{x_l}{a}, \quad z_l = \frac{x_l}{a} + \varepsilon(s - x_l) \qquad (l = 1,\ 2),$$

где $s, d \in \mathbb{R}$ — числа, на которые накладываются следующие условия:

- $s(s+ab-c)=d^2$ при $a\varepsilon=2$ и $ab+c=0$;
- $s \in \{0, c-ab\}$ и $d=0$ при $a\varepsilon=2$ и $ab+c\neq 0$;
- $s \in \{0, c-ab\}$ и $d=0$ при $a\varepsilon=1$ и $bc\neq 0$;
- $s \in \{0, c-ab\}$ и $d=0$ либо $s=-ab$ при $a\varepsilon=1$ и $bc=0$;
- $s \in \{0, c-ab\}$ и $d=0$ при $a\varepsilon\neq 2$ и $(ab+(a\varepsilon-1)c)((a\varepsilon-1)ab+c)(a\varepsilon-1)<0$;
- $s \in \{0, c-ab\}$ и $d=0$ либо $s=c+\dfrac{ab+c}{a\varepsilon-2}$ и $d=\pm\dfrac{1}{a\varepsilon-2}\sqrt{\dfrac{(ab+(a\varepsilon-1)c)((a\varepsilon-1)ab+c)}{a\varepsilon-1}}$

при $a\varepsilon\neq 1,\,2$ и $(ab+(a\varepsilon-1)c)((a\varepsilon-1)ab+c)(a\varepsilon-1)\geqslant 0$.

Доказательство. Поскольку $a\neq 0$, в системе (4) первые четыре уравнения позволяют выразить переменные y_1, y_2, z_1, z_2 через x_1 и x_2: $y_l=-\dfrac{x_l}{a}$, $z_l=\dfrac{x_l}{a}+\varepsilon(s-x_l)$ $(l=1,\,2,$ $s:=\dfrac{x_1+x_2}{2})$. Это приводит к уравнениям относительно x_1 и x_2:

$$abx_l+(x_l+a\varepsilon(s-x_l))(x_l-c)=0 \qquad (l=1,\,2). \tag{6}$$

Полагая $d:=\dfrac{x_1-x_2}{2}$, получаем $x_1=s+d$, $x_2=s-d$, и уравнения (6) в координатах s, d переписываются в виде

$$ab(s\pm d)+(s\pm(1-a\varepsilon)d)((s-c)\pm d)=0,$$

или

$$(s(s+ab-c)+(1-a\varepsilon)d^2)\pm d((2-a\varepsilon)(s-c)+(c+ab))=0,$$

или

$$\begin{cases} s(s+ab-c)=(a\varepsilon-1)d^2; \\ d((a\varepsilon-2)(s-c)-(ab+c))=0. \end{cases} \tag{7}$$

Система (7) при $a\varepsilon-2=ab+c=0$ эквивалентна уравнению $s(s+ab-c)=d^2$, а при $a\varepsilon-2=0\neq ab+c$ — системе

$$\begin{cases} d=0; \\ s\in\{0, c-ab\}. \end{cases} \tag{8}$$

Допустим, что $a\varepsilon\neq 2$. Условие (7) выполнено, если и только если справедливо (8) либо

$$\begin{cases} (a\varepsilon-2)(s-c)-(ab+c)=0; \\ s(s+ab-c)=(a\varepsilon-1)d^2. \end{cases} \tag{9}$$

Если имеет место первое равенство в (9), то $(a\varepsilon-2)(s-c)=ab+c$, $(a\varepsilon-2)s=ab+(a\varepsilon-1)c$, $(a\varepsilon-2)(s+ab-c)=(a\varepsilon-1)ab+c$, и тогда второе равенство в (9) эквивалентно равенству $(ab+(a\varepsilon-1)c)((a\varepsilon-1)ab+c)=(a\varepsilon-1)(a\varepsilon-2)^2d^2$. Возможны следующие случаи:

1) $a\varepsilon=1$, $bc\neq 0$;
2) $a\varepsilon=1$, $bc=0$;
3) $(ab+(a\varepsilon-1)c)((a\varepsilon-1)ab+c)(a\varepsilon-1)<0$;
4) $a\varepsilon\neq 1$, $(ab+(a\varepsilon-1)c)((a\varepsilon-1)ab+c)(a\varepsilon-1)\geqslant 0$.

Система (9) в случаях 1 и 3 не имеет решений, в случае 2 эквивалентна равенству $s = -ab$, а в случае 4 — системе

$$\begin{cases} s = c + \dfrac{ab + c}{a\varepsilon - 2}; \\ d = \pm \dfrac{1}{a\varepsilon - 2}\sqrt{\dfrac{(ab + (a\varepsilon - 1)c)((a\varepsilon - 1)ab + c)}{a\varepsilon - 1}}. \end{cases}$$

Резюмируя вышесказанное, получаем требуемое утверждение. Теорема доказана.

3. Локализация

При построении локализирующих множеств будет удобно использовать обозначение $\overline{x} := \frac{1}{N}\sum\limits_{j=1}^{N} x_j$. В этом случае первая группа уравнений системы (2) перепишется в виде $\dot{x}_l = -y_l - z_l + \varepsilon(\overline{x} - x_l)$ $(l = 1, \ldots, N)$.

В качестве локализирующей выберем функцию $\varphi := \sum\limits_{l=1}^{N}\Big((x_l - \alpha)^2 + y_l^2 + 2z_l\Big)$, где α — произвольное вещественное число. Ее производная Ли $L_f\varphi$ по векторному полю f системы (2) равна

$$L_f\varphi = \sum_{l=1}^{N}\Big(2(x_l - \alpha)(-y_l - z_l + \varepsilon(\overline{x} - x_l)) + 2y_l(x_l + ay_l) + 2(bx_l + z_l(x_l - c))\Big).$$

Соответствующее универсальное сечение S_φ задается уравнением

$$\sum_{l=1}^{N}\Big(\alpha y_l + ay_l^2 + (\alpha - c)z_l + bx_l + \varepsilon(\overline{x} - x_l)(x_l - \alpha)\Big) = 0.$$

При этом

$$\sum_{l=1}^{N}\Big((\overline{x} - x_l)(x_l - \alpha)\Big) = \sum_{l=1}^{N}\Big(((\overline{x} - \alpha) - (x_l - \alpha))(x_l - \alpha)\Big) = N(\overline{x} - \alpha)^2 - \sum_{l=1}^{N}(x_l - \alpha)^2.$$

Таким образом, уравнение S_φ принимает вид

$$\varepsilon N(\overline{x} - \alpha)^2 + \sum_{l=1}^{N}\Big(\alpha y_l + ay_l^2 + (\alpha - c)z_l + bx_l - \varepsilon(x_l - \alpha)^2\Big) = 0,$$

т. е.

$$(c - \alpha)\sum_{l=1}^{N} z_l = \varepsilon N(\overline{x} - \alpha)^2 + \sum_{l=1}^{N}(\alpha y_l + ay_l^2 + bx_l - \varepsilon(x_l - \alpha)^2).$$

Значит, на универсальном сечении S_φ координаты x_l и y_l принимают произвольные значения, по которым определяется ограничение на координаты z_l, а ограничение $\varphi|_{S_\varphi}$ локализирующей функции φ на универсальное сечение S_φ удовлетворяет равенству

$$(c - \alpha)\cdot\varphi|_{S_\varphi} = 2\varepsilon N(\overline{x} - \alpha)^2 + \sum_{l=1}^{N}\Big((c - \alpha + 2a)y_l^2 + 2\alpha y_l + (c - \alpha - 2\varepsilon)(x_l - \alpha)^2 + 2bx_l\Big).$$

Предполагаем, что число α выбрано не равным c. Полагая $\gamma := \dfrac{b}{c-\alpha}$, $X_l := x_l - \alpha + \gamma$ $(l = 1, \ldots, N)$ и $\overline{X} := \frac{1}{N}\sum\limits_{l=1}^{N} X_l = \overline{x} - \alpha + \gamma$, получаем, что $(c-\alpha)\cdot\varphi|_{S_\varphi} = F + G$, где

$$F := 2\varepsilon N(\overline{X}-\gamma)^2 + \sum_{l=1}^{N}\Big((c-\alpha-2\varepsilon)(X_l-\gamma)^2 + 2b(X_l+\alpha-\gamma)\Big) =$$
$$= 2\varepsilon N\overline{X}^2 + (c-\alpha-2\varepsilon)\sum_{l=1}^{N} X_l^2 + N(c-\alpha)\gamma^2 + 2bN(\alpha-\gamma);$$
$$G := \sum_{l=1}^{N}\Big((c-\alpha+2a)y_l^2 + 2\alpha y_l\Big);$$

Параметр α выбираем так, что числа ε, $c-\alpha-2\varepsilon$, $c-\alpha+2a$ неотрицательны (соответственно неположительны), причем $c-\alpha+2a \neq 0$. Тогда

- число $c-\alpha$ положительно (соответственно отрицательно);
- функция F всюду не менее (соответственно не более) $N(c-\alpha)\gamma^2 + 2bN(\alpha-\gamma)$;
- функция G всюду не менее (соответственно не более) $-\dfrac{N\alpha^2}{c-\alpha+2a}$;
- функция $(c-\alpha)\varphi$ всюду на S_φ не менее (соответственно не более) $N(c-\alpha)\gamma^2 + 2bN(\alpha-\gamma) - \dfrac{N\alpha^2}{c-\alpha+2a}$;
- выполняется неравенство

$$\varphi|_{S_\varphi} \geqslant N\gamma^2 + \frac{2bN(\alpha-\gamma)}{c-\alpha} - \frac{N\alpha^2}{(c-\alpha+2a)(c-\alpha)} = N\frac{b(2\alpha(c-\alpha)-b)(c-\alpha+2a)-\alpha^2(c-\alpha)}{(c-\alpha)^2(c-\alpha+2a)}.$$

Значит, при таком выборе параметра α число $\varphi_{\inf} := \inf\{\varphi(x)\}_{x\in S_\varphi}$ удовлетворяет неравенству

$$\varphi_{\inf} \geqslant N\,\frac{b(2\alpha(c-\alpha)-b)(c-\alpha+2a)-\alpha^2(c-\alpha)}{(c-\alpha)^2(c-\alpha+2a)}. \tag{10}$$

Согласно [6, теорема 1.7], на любом инвариантном компакте выполняется неравенство $\varphi \geqslant \varphi_{\inf}$. Ввиду (10), на любом инвариантном компакте

$$\sum_{l=1}^{N}\Big((x_l-\alpha)^2 + y_l^2 + 2z_l\Big) \geqslant N\,\frac{b(2\alpha(c-\alpha)-b)(c-\alpha+2a)-\alpha^2(c-\alpha)}{(c-\alpha)^2(c-\alpha+2a)}.$$

Данное неравенство задает замкнутое подмножество $\Omega(\alpha) \subset \mathbb{R}^{3N}$, ограниченное эллиптическим параболоидом при $N = 1$ и параболическим цилиндром при $N > 1$ и расположенное с внешней стороны от соответствующей поверхности. Таким образом, подмножество $\Omega(\alpha) \subset \mathbb{R}^{3N}$ является локализирующим.

Число α выбиралось так, что $\alpha \neq c$, $c+2a$, а числа ε, $c-\alpha-2\varepsilon$, $c-\alpha+2a$ имеют один и тот же знак. Множество $D \subset \mathbb{R}$ всех таких чисел $\alpha \in \mathbb{R}$ имеет следующий вид:

- если $\varepsilon > 0$ и $a+\varepsilon > 0$, то $D = (-\infty; c-2\varepsilon]$;
- если $\varepsilon > 0$ и $a+\varepsilon \leqslant 0$, то $D = (-\infty; c+2a)$;
- если $\varepsilon < 0$ и $a+\varepsilon < 0$, то $D = [c-2\varepsilon; +\infty)$;
- если $\varepsilon < 0$ и $a+\varepsilon \geqslant 0$, то $D = (c+2a; +\infty)$;
- если $\varepsilon = 0$, то $D = (-\infty; \min\{c, c+2a\}) \cup (\max\{c, c+2a\}; +\infty)$.

Тогда подмножество $\Omega := \bigcap\limits_{\alpha\in D} \Omega(\alpha) \subset \mathbb{R}^{3N}$ является локализирующим. Полагая

$$\vartheta(x_1,\ldots,x_N,\alpha) := N\,\frac{b(2\alpha(c-\alpha)-b)(c-\alpha+2a)-\alpha^2(c-\alpha)}{(c-\alpha)^2(c-\alpha+2a)} - \sum_{l=1}^{N}(x_l-\alpha)^2$$

и $g(x_1,\ldots,x_N) := \sup\{\vartheta(x_1,\ldots,x_N,\alpha)\}_{\alpha\in D}$, получаем, что подмножество $\Omega \subset \mathbb{R}^{3N}$ задается неравенством $\sum\limits_{l=1}^{N}(y_l^2+2z_l) \geqslant g(x_1,\ldots,x_N)$.

Проиллюстрируем полученный результат в частном случае. Положим $a := 0.36$, $b := 0.4$, $c := 4.5$, $\varepsilon := 0.27$ (этот случай был рассмотрен в [1]). Положим $N := 1$. Множество $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ при указанных значениях параметров задается неравенством (для удобства индекс 1 у переменных x, y, z опущен)

$$(x-\alpha)^2 + y^2 + 2z \geqslant \frac{0.4\cdot(2\alpha(4.5-\alpha)-0.4)(5.22-\alpha)-\alpha^2(4.5-\alpha)}{(4.5-\alpha)^2(5.22-\alpha)},$$

$\alpha \in D$, где $D := (-\infty; 3.96) \subset \mathbb{R}$. Полагая

$$\vartheta(x,\alpha) := \frac{0.4\cdot(2\alpha(4.5-\alpha)-0.4)(5.22-\alpha)-\alpha^2(4.5-\alpha)}{(4.5-\alpha)^2(5.22-\alpha)} - (x-\alpha)^2$$

и $g(x) := \sup\{\vartheta(x,\alpha)\}_{\alpha\in D}$, получаем, что локализирующее множество $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ задается неравенством $y^2 + 2z \geqslant g(x)$. Полученное локализирующее множество представлено на рис. 1.

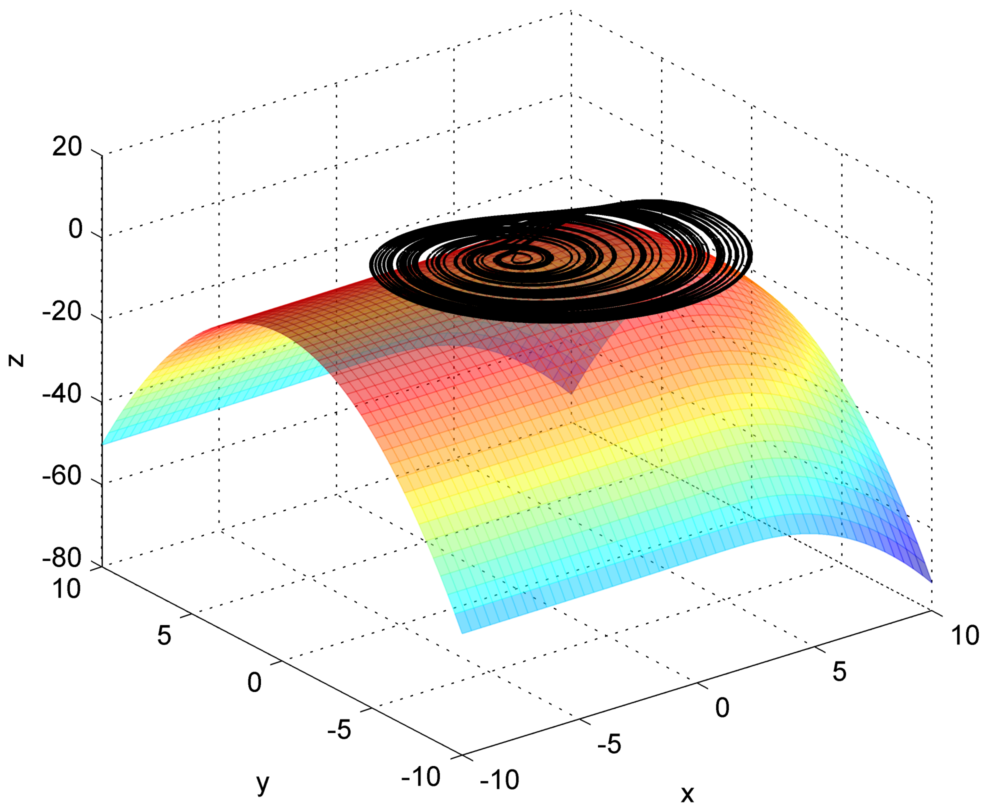

Рис. 1. Локализирующее множество системы (2) при $a := 0.36$, $b := 0.4$, $c := 4.5$, $\varepsilon := 0.27$, $N := 1$

Заключение

В работе проведено исследование динамической системы взаимосвязанных осцилляторовРесслера в двух направлениях: нахождение положений равновесия и локализация инвариантных компактов.

Положения равновесия найдены для систем не более двух осцилляторов. Так, система, состоящая из одного осциллятора, имеет, в зависимости от значений параметров, либо одно, либо два, либо бесконечно много положений равновесия, причем в последнем случае положения равновесия образуют прямую в трехмерном пространстве. Множество положений равновесия системы двух осцилляторов также явно описано, его структура в еще большей степени зависит от значений параметров.

При помощи подходящего выбора локализирующей функции получено локализирующее множество, являющееся пересечением семейства замкнутых подмножеств, каждое из которых ограничено некоторой параболической поверхностью и расположено с внешней стороны от нее. Приведена иллюстрация этого локализирующего множества для одного конкретного набора значений параметров.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 1.644.2014/K).

Список литературы

1. Nandan M., Hens C.R., Pal P., Dana S.K. Transition from amplitude to oscillation death in a network of oscillators // Chaos. 2014. Vol. 24. Article no. 043103. DOI: 10.1063/1.4897446

2. Kondor D., Vattay G. Dynamics and Structure in Cell Signaling Networks: Off-State Stability and Dynamically Positive Cycles // PLoS One. 2013. Vol. 8, no. 3. e57653. DOI: 10.1371/journal.pone.0057653

3. Motter A.E., Myers S.A., Anghel M., Nishikawa T. Spontaneous synchrony in power-grid networks // Nat. Phys. 2013. Vol. 9. P. 191–197. DOI: 10.1038/nphys2535

4. Wu Q., Fu X., Small M., Xu X.-J. The impact of awareness on epidemic spreading in networks // Chaos. 2012. Vol. 22. Article no. 013101. DOI: 10.1063/1.3673573

5. Крищенко А.П. Локализация инвариантных компактов динамических систем // Дифференциальные уравнения. 2005. Vol. 41, no 12. С. 1597–1604.

6. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Инвариантные компакты динамических систем. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 231 с.

7. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Реализация итерационной процедуры в задачах локализации автономных систем // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 11. С. 307–319. DOI: 10.7463/1114.0734649

8. Канатников А.Н., Михайлова О.В. Локализация инвариантных компактов дискретной системы Лози // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 8. С. 121–134.

9. Канатников А.Н., Федорова Ю.П. Локализация инвариантных компактов двумерных непрерывных динамических систем // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 7. С. 159–174.

10. Канатников А.Н. Локализирующие множества для инвариантных компактов непрерывных динамических систем с возмущением // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 11. С. 1483–1492.

11. Krishchenko A.P., Starkov K.E. Dynamical Analysis of Raychaudhuri Equations Based on the Localization Method of Compact Invariant Sets // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2014. Vol. 24, no. 11. Art. no. 1450136. DOI: 10.1142/S0218127414501363

Mathematics & Mathematical Modelling
Electronic journal of the Bauman MSTU
http://mathmjournal.ru

Mathematics and Mathematical Modelling of the Bauman MSTU, 2015, no. 5, pp. 17–27.
DOI: **10.7463/mathm.0515.0816614**
Received: 29.09.2015

The Research of the Dynamical System of Globally Coupled Rössler Oscillators

Styrt O. G.[1,*]
[*]oleg_styrt@mail.ru
[1]Bauman Moscow State Technical University, Russia

Keywords: dynamical system, localization, invariant compact set, oscillator

The paper studies a dynamical system of globally coupled Rössler oscillators previously considered in terms of oscillation quenching. There are two types of quenching, namely homogeneous steady state and inhomogeneous steady state. A transition from the former to the latter can cause a disease in biological structure, a defect in synchronized power grid, as well as it can be used for epidemic delimitation.

The investigation of the system of Rössler oscillators is conducted in two directions: finding the equilibrium points and localization of invariant compact sets.

The equilibrium points are found for the systems of two oscillators, at most. In particular, a system consisting of one oscillator has, depending on the values of parameters, one, two, or infinitely many equilibrium points, and in the latter case the equilibrium points form a line in 3D space. The set of equilibrium points of the system of two oscillators is explicitly described as well; its structure to an even greater degree depends on the values of parameters.

Localization of invariant compact sets involves the method concerned with constructing a localizing function. One knows that its values on each invariant compact set are bounded above and below, respectively, by the supremum and the infimum of its values on the set of zeros of its gradient. This method revealed, as a localizing set, the intersection of a family of closed subsets each of them being bounded by some parabolic surface and located on its outer side. The paper presents illustration of this localizing set for one certain set of values of parameters.

References

1. Nandan M., Hens C.R., Pal P., Dana S.K. Transition from amplitude to oscillation death in a network of oscillators. *Chaos*, 2014, vol. 24, iss. 4, art. no. 043103. DOI: 10.1063/1.4897446
2. Kondor D., Vattay G. Dynamics and Structure in Cell Signaling Networks: Off-State Stability and Dynamically Positive Cycles. PLoS One. 2013. Vol. 8, no. 3, art. no. e57653. DOI: 10.1371/journal.pone.0057653

3. Motter A.E., Myers S.A., Anghel M., Nishikawa T. Spontaneous synchrony in power-grid networks. *Nature Physics*, 2013, vol. 9, no. 3, pp. 191–197. DOI: 10.1038/nphys2535

4. Wu Q., Fu X., Small M., Xu X.-J. The impact of awareness on epidemic spreading in networks. *Chaos*, 2012, Vol. 22, art. no. 013101. DOI: 10.1063/1.3673573

5. Krishchenko A.P. Localization of Invariant Compact Sets of Dynamical Systems. *Differentsial'nye uravnenija*, 2005, vol. 41, no. 12, pp. 1597–1604. (English version: *Differential Equations*, 2005, vol. 41, no. 12, pp. 1669–1676. DOI: 10.1007/s10625-006-0003-6).

6. Kanatnikov A.N., Krishchenko A.P. *Invariantnye kompakty dinamicheskih system* [Invariant compact sets of dynamical systems]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2011. 231 p. (in Russian).

7. Kanatnikov A.N., Krishchenko A.P. Realization of the Iteration Procedure in Localization Problems of Autonomous Systems. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2014, no. 11, pp. 307–319. DOI: 10.7463/1114.0734649 (in Russian).

8. Kanatnikov A.N., Mikhaylova O.V. Localization of invariant compact sets of the discrete-time Lozi system. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2013, no. 8, pp. 121–134. DOI: 10.7463/0813.0609276 (in Russian).

9. Kanatnikov A.N., Fedorova Yu.P. Localization of invariant compact sets of two-dimensional continuous dynamical systems. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2013, no. 7, pp. 159–174. DOI: 10.7463/0713.0583104 (in Russian).

10. Kanatnikov A.N. Localizing Sets for Invariant Compact Sets of Continuous Dynamical Systems with a Perturbation. *Differentsial'nye uravnenija*, 2012, vol. 48, no. 11, pp. 1483–1492. (English version: *Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 11, pp. 1461–1469 DOI: 10.1134/S0012266112110031).

11. Krishchenko A.P., Starkov K.E. Dynamical Analysis of Raychaudhuri Equations Based on the Localization Method of Compact Invariant Sets. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2014, vol. 24, no. 11, art. no. 1450136. DOI: 10.1142/S0218127414501363