Математика и Математическое моделирование
Сетевое издание
МГТУ им. Н.Э. Баумана
http://mathmjournal.ru

Ссылка на статью:
// Математика и Математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 4. С. 54–65.

DOI: **10.7463/mathm.0415.0812317**

Представлена в редакцию: 24.09.2015

УДК 517.938

Локализация инвариантных компактов системы Lorenz-84

Рамазанова Х. М.[1,*]

[*] xadi91@yandex.ru

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Один из методов построения локализирующих множеств основан на использовании функций, определенных на фазовом пространстве системы – так называемый функциональный метод локализации. В статье с помощью данного метода получены оценки положения инвариантных компактных множеств автономной системы Lorenz-84, используемой при построении некоторых метеорологических моделей. Рассмотрен простейший вариант системы с отсутствующими термическими перегрузками, и общий вариант системы, в которой при некоторых значениях параметров возникает хаотическая динамика. При всех значениях параметров системы описано компактное локализирующее множество.

Ключевые слова: локализация; локализирующее множество; инвариантный компакт; система Lorenz-84.

Введение

В поведении динамических систем разного вида важную роль играют ограниченные траектории, к которым относятся положения равновесия, предельные циклы, сепаратрисы, траектории на аттракторах. Проблема оценки положения подобных траекторий привела к постановке задач, называемых задачами локализации. В этих задачах оценка положения ограниченных траекторий интерпретируется как построение множества в фазовом пространстве, содержащего все инвариантные компактные множества системы (это множество называют локализирующим).

Подмножество M фазового пространства динамической системы называют инвариантным, если для любой точки $x_0 \in M$ любое решение этой системы, проходящее через точку x_0, целиком содержится в M (решение рассматривается на максимальном интервале существования). Примерами инвариантных компактов являются: положения равновесия, периодические траектории, аттракторы и репеллеры, инвариантные торы. Инвариантные компактные множества во многом определяют структуру фазового портрета динамической системы.

Один из методов построения локализирующих множеств основан на использовании функций, определенных на фазовом пространстве системы – так называемый функциональный метод локализации [1]. Основные положения метода были опубликованы в 1995 г. при решении задач локализации предельных циклов [2,3]. В окончательном виде суть функционального метода локализации для автономных систем изложена в [4]. Тема локализации инвариантных компактов в литературе обсуждается достаточно активно. Исследования направлены как на развитие метода и его использование для динамических систем других классов, так и на исследование конкретных динамических систем. В исследовании конкретных систем можно выделить два направления. Первое направление исследований по локализации – автономные системы со сложным поведением: системы Лоренца [5,6], ПРТ-системы [7] , Ланфорда [8]. Второе направление исследований – прикладные системы, используемые в биологии, физике [9,10,11]. Система Lorenz-84, предложенная Лоренцем в 1984 году, представляет собой простейшую модель общей циркуляции атмосферы в средних широтах [12]. Модель использовалась в различных климатологических исследованиях, а ее поведение активно изучалось. Численные и аналитические исследования системы можно найти в [13]. Бифуркационный анализ положений равновесия системы [14] показал наличие хаоса при определенных значениях параметров модели. Проблема локализации инвариантных компактных множеств системы рассмотрена в [15].

В данной работе рассматривается задача локализации инвариантных компактов системы Lorenz-84. Работа организована следующим образом. В разд.1 описан функциональный метод локализации, перечислены простейшие свойства локализирующих множеств. В разд. 2 анализируется простейший вариант системы Lorenz-84, когда отсутствуют термические нагрузки. В разд. 3 проводится исследование для общего варианта автономной системы Lorenz-84, в результате которого построено компактное локализирующее множество, описанное неравенством. В заключении подводятся краткие итоги работы.

1. Функциональный метод локализации

Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x)\ , \tag{1}$$

где

$$x = (x_1, \dots, x_n)^T \epsilon R^n,\ \ f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T \epsilon\, C^\infty(R^n).$$

Пусть $f = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ — векторное поле на $\mathbb{R}^n$, соответствующее системе (1). Для произвольной функции $\varphi \epsilon\, C^\infty(\mathbb{R}^n)$ через $L_{f\varphi(x)}$ обозначим производную Ли этой функции по векторному полю f:

$$L_{f\varphi(x)} = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i} = \langle f(x),\ \mathrm{grad}\,\varphi(x)\rangle.$$

Множество

$$S_\varphi = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ L_{f\varphi(x)} = 0\}.$$

называют универсальным сечением [1]. Название вызвано тем, что универсальное сечение пересекается с любым предельным циклом системы и его удобно использовать как сечение Пуанкаре.

Положим для функции $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$

$$\varphi_{sup} = \sup_{x \in S_\varphi} \varphi(x), \qquad \varphi_{inf} = \inf_{x \in S_\varphi} \varphi(x).$$

Теорема 1[1,4]. Для любой функции $\varphi(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ все компактные инвариантные множества системы (1) содержатся в множестве

$$\Omega_\varphi = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi_{inf} \le \varphi(x) \le \varphi_{sup}\}.$$

Рассматривая различные локализирующие функции, мы получаем некоторый набор локализирующих множеств. Пересечение всех найденных локализирующих множеств также является локализирующим множеством, причем пересечение, как оценка положения инвариантных компактов, представляет собой более сильный результат, чем каждое локализирующее множество в отдельности. Один из подходов к решению задач локализации – выбрать параметрическое семейство локализирующих функций и затем найти пересечение полученного параметрического семейства локализирующих множеств.

Отметим некоторые свойства локализирующих множеств.

1. Пусть $\varphi(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ и $\psi(x) = h(\varphi(x))$, где $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - гладкая строго монотонная функция с ненулевой производной. Тогда множества Ω_φ и Ω_ψ, соответствующие функциям φ и ψ, совпадают. В частности, это верно при $h(t) = ct + d, c \ne 0$.

2. Если функция $\varphi(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ достигает в точке x_* своего наименьшего (наибольшего) значения в $\mathbb{R}^n$, то $\varphi_{\inf} = \varphi(x_*)$ (соответственно $\varphi_{\inf} = \varphi(x_*)$), а локализирующее множество Ω_φ можно задать неравенством $\varphi(x) \le \varphi_{\sup}$ (соответственно $\varphi_{\inf} \le \varphi(x)$).

3. Пусть даны функции $\varphi_i \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $i = 0,1,2,\ldots$ Построим множества $\Omega_0 = \Omega_{\varphi 0}$, $\Omega_i = \Omega_{i-1} \cap \Omega_{i-1,i}$, $i = 1,2,\ldots,$ где

$$\Omega_{i-1,i} = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi_{i,\inf}(\Omega_{i-1}) \le \varphi_i(x) \le \varphi_{i,\sup}(\Omega_{i-1})\};$$

$$\varphi_{i,\sup}(\Omega_{i-1}) = \sup_{S_{\varphi_i}(\Omega_{i-1})} \varphi_i(x); \; \varphi_{i,\inf}(\Omega_{i-1}) = \inf_{S_{\varphi_i}(\Omega_{i-1})} \varphi_i(x);$$

$$S_{\varphi_i}(\Omega_{i-1}) = \{x \in \Omega_{i-1} : L_f \varphi_{i(x)} = 0\}.$$

Тогда $\Omega_0 \supseteq \Omega_1 \supseteq \ldots \supseteq \Omega_i \supseteq \ldots$ и пересечение этих множеств содержит все компактные инвариантные множества системы (1). Таким образом, возникает некоторый итерационный процесс построения вложенных локализирующих множеств.

2. Система Lorenz-84 при отсутствии термических нагрузок

Система Lorenz-84 имеет вид [12]:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha x - y^2 - z^2 + \alpha F(t), \\ \dot{y} = -y + xy - \beta xz + G(t), \\ \dot{z} = -z + \beta xy + xz. \end{cases}$$

Она была предложена как модель общей циркуляции атмосферы в средних широтах.

В этой модели x обозначает интенсивность западной циркуляции, y и z – синусные и косинусные составляющие большой бегущей волны. Функции $F(t)$ и $G(t)$ учитывают термические нагрузки, вызванные температурным контрастом между зимой и летом, а также между океаном и земной поверхностью, соответственно. Коэффициенты α и β — положительные параметры модели.

В своей работе Лоренц отметил, что F и G являются периодическими функциями, периодом которых является год. Однако, в своих расчетах Лоренц считал значение G фиксированным, а значение F — различным для зимних и летних условий. В данной работе ограничимся автономным случаем системы, т. е. полагаем, что термические нагрузки постоянны, т.е. $F(t) = f$, $G(t) = g$. В этом случае получаем систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha x - y^2 - z^2 + \alpha f, \\ \dot{y} = -y + xy - \beta xz + g, \\ \dot{z} = -z + \beta xy + xz. \end{cases} \qquad (2)$$

Для начала рассмотрим простой вариант системы, когда параметры f и g равны нулю. Тогда система (2) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha x - y^2 - z^2, \\ \dot{y} = -y + xy - \beta xz \\ \dot{z} = -z + \beta xy + xz. \end{cases}$$

(3)

Система (3) при всех значениях параметров имеет единственное положение равновесия – точку (0,0,0). Оказывается, что нулевое положение равновесия глобально устойчиво.

Для анализа системы (3) используем цилиндрические координаты.

Сделаем следующую замену переменных в исходной системе:

$$y = \rho\cos\psi, \quad z = \rho\sin\psi, \qquad x = z.$$

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{z} = -\alpha z - \rho^2, \\ \dot{\rho} = \rho(z - 1), \\ \dot{\psi} = \beta z. \end{cases}$$

Видно, что в системе выделяется независимая подсистема из первых двух уравнений:

$$\begin{cases} \dot{z} = -\alpha z - \rho^2, \\ \dot{\rho} = \rho(z - 1). \end{cases} \qquad (4)$$

Поэтому анализ системы начнем с этой подсистемы.

Система (4) имеет простое поведение. У нее единственное положение равновесия $\rho = 0, z = 0$, являющееся глобально асимптотически устойчивым. Действительно, рассмотрим $V(\rho, z) = \rho^2 + z^2$. Эта функция положительно определена, непрерывно дифференцируема, а ее производная в силу системы $\dot{V}(\rho, z) = -2\rho^2 - 2\alpha z^2 < 0$ (при $\alpha > 0$). Следовательно, функция $V(\rho, z)$ является функцией Ляпунова, а положение равновесия, согласно теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости, глобально асимптотически устойчиво.

Приведенные рассуждения позволяют сделать вывод, что в системе существует единственный инвариантный компакт – нулевое положение равновесия. К аналогичным выводам приводит и применение функционального метода локализации. Действительно, рассмотрим многочлен с неопределенными коэффициентами вида:

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2.$$

Найдем производную этой функции в силу системы (3):

$$L_{f\varphi} = -2A\alpha x^2 - 2By^2 - 2Cz^2 - 2Axy^2 - 2Axz^2 + 2Bxy^2 + 2Cxz^2 - 2B\beta xyz + 2C\beta xyz.$$

Выберем случай, когда степень $L_{f\varphi}$ равняется 2, для чего необходимо и достаточно, чтобы $A = B = C$. Для определенности примем $A = B = C = 1$. Тогда $\varphi_0(x, y, z) = x^2 + +y^2 + z^2$, а производная этой функции в силу системы (3) равна

$$L_{f\varphi_0(x)} = -2\alpha x^2 - 2y^2 - 2z^2.$$

Уравнение $L_{f\varphi_0} = 0$ принимает вид

$$-2\alpha x^2 - 2y^2 - 2z^2 = 0.$$

Отсюда вытекает, что универсальное сечение S_{φ_0} состоит из единственной точки $x = y = = z = 0$, а локализирующее множество имеет вид $x^2 + y^2 + z^2 \le 0$, т.е. состоит из единственной точки – положения равновесия системы. Таким образом, единственным инвариантным компактом системы является ее положение равновесия (0,0,0).

Отметим, что локализирующая функция $\varphi_0(x, y, z)$ оказалась функцией Ляпунова для системы (3).

3. Система Lorenz-84 при наличии термических нагрузок

Теперь рассмотрим общий случай автономной системы (2) (когда $f, g \ne 0$). Наличие слагаемых f и g заметно усложняет ее поведение.

Выясним положения равновесия системы (2). Для этого рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} -\alpha x - y^2 - z^2 + \alpha f = 0, \\ -y + xy - \beta xz + g = 0, \\ -z + \beta xy + xz = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Второе и третье уравнения системы образуют линейную подсистему относительно y и z. Решив ее и подставив решения в первое уравнение, получим уравнение третьей степени:

$$(1 + \beta^2)x^3 - (f\beta^2 + f + 2)x^2 + (1 + 2f)x + \frac{g^2}{\alpha} - f = 0. \tag{6}$$

Таким образом, система может иметь одно, два или три положения равновесия. Проведем анализ количества корней уравнения (6) . Введем обозначения

$$B_1 = -\frac{f\beta^2 + f + 2}{1 + \beta^2}\ ; \ B_2 = \frac{1 + 2f}{1 + \beta^2}; \ B_3 = \frac{g^2 - \alpha f}{\alpha(1 + \beta^2)}.$$

Тогда уравнение (6) примет вид

$$x^3 + B_1 x^2 + B_2 x + B_3 = 0 \tag{7}$$

Заменим в уравнении (7) переменную x на новую переменную $y = x + \frac{B_1}{3}$ и, упростив полученное выражение, получим приведенное уравнение

$$y^3 + py + q = 0,$$

где $p = -\frac{B_1^2}{3} + B_2, \quad q = \frac{2B_1^3}{27} - \frac{B_1 B_2}{3} + B_3.$

Число действительных решений кубического уравнения зависит от знака дискриминанта $D = (\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2$, а именно, при $D > 0$ уравнение имеет одно решение (система имеет одно положение равновесия), а при $D < 0$ уравнение имеет три решения (система имеет три положения равновесия).

Рассмотрим задачу локализации инвариантных компактов в системе (2). В качестве локализирующей функции выберем полином второй степени, подбирая его коэффициенты так, чтобы его производная в силу системы имела степень не выше двух.

Теорема 2. Для того, чтобы многочлен второй степени общего вида

$$\varphi(x,y,z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Kx + 2Ly + 2Mz$$

имел производную в силу системы (2) степени не выше двух, необходимо и достаточно, чтобы

$$D = E = F = 0, \qquad A = B = C.$$

Доказательство. Непосредственным вычислением получаем

$$L_{f\varphi(x)} = 2(-A + B + F\beta)xy^2 + 2(-A + C - F\beta)xz^2 + 2(-B\beta + C\beta + 2F)xyz -$$
$$2Dy^3 - 2Dyz^2 - 2Ez^3 - 2Ey^2z + 2(D + \beta E)x^2y + 2(-\beta D + E)x^2z + \Gamma,$$

где Γ — сумма слагаемых степени не выше двух. Равенство нулю коэффициентов при слагаемых третьей степени приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} -A + B - \beta F = 0, \\ -A + C - F = 0, \\ -\beta B + \beta C + 2F = 0, \\ D = 0, \\ E = 0, \\ D + \beta E = 0, \\ -\beta D + E = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы является $D = E = F = 0$, $A = B = C$. Теорема доказана.

Итак, производная квадратичной функции в силу системы является квадратичной, если эта функция, с точностью до числового множителя, имеет вид

$$\varphi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2Kx + 2Ly + 2Mz.$$

Эту функцию рассмотрим в качестве локализирующей. Ее производная в силу системы:

$$\dot{\varphi}(x,y,z) = 2(-\alpha x^2 - (K+1)y^2 - (K+1)z^2 + (L + M\beta)xy + (M - L\beta)xz +$$
$$+(f - K)\alpha x + (g - L)y - Mz + (K\alpha f + Lg)\big).$$

В результате приходим к задаче

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2Kx + 2Ly + 2Mz \to \text{extr}, \\ \alpha x^2 + (K+1)y^2 + (K+1)z^2 - (L + M\beta)xy - (M - L\beta)xz - \\ -(f - K)\alpha x - (g - L)y + Mz - (K\alpha f + Lg) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Поскольку целевая функция имеет глобальный минимум, нижнее решение задачи φ_{inf} совпадает с этим минимумом, так что неравенство $\varphi(x) \geq \varphi_{inf}$ в данном случае оказывается тривиальным (выполняется во всем фазовом пространстве). В рассматриваемой задаче ограничение описывает поверхность 2-го порядка. Положительно определенная квадратичная функция имеет на этой поверхности конечную точную верхнюю грань, если эта поверхность – эллипсоид. А это равносильно знакоопределенности матрицы квадратичной формы в левой части ограничения. Запишем матрицу квадратичной формы:

$$W = \begin{pmatrix} \alpha & -\dfrac{L + M\beta}{2} & \dfrac{M - L\beta}{2} \\ -\dfrac{L + M\beta}{2} & K+1 & 0 \\ \dfrac{M - L\beta}{2} & 0 & K+1 \end{pmatrix}$$

Согласно критерию Сильвестра, для знакоопределенности квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры четного порядка были положительны, а миноры нечетного порядка имели одинаковый знак, т. е.

$$\Delta_2 > 0, \qquad \frac{\Delta_3}{\Delta_1} > 0.$$

В нашем случае (считая с правого нижнего угла)

$$\Delta_1 = (K+1);\ \Delta_2 = (K+1)^2;$$

$$\Delta_3 = (K+1)\left(\alpha(K+1) - \frac{(\beta^2+1)(L^2+M^2)}{4}\right).$$

Таким образом, получаем следующее условие

$$K + 1 > \frac{(\beta^2+1)(L^2+M^2)}{4\alpha}.$$

Найти точное аналитическое решение задачи (8) вряд ли возможно. Однако можно найти оценку ее решения сверху. Это позволит записать соответствующее локализирующее множество.

Рассмотрим более простой частный случай $L = M = 0$. В этом случае экстремальная задача выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2Kx \to extr, \\ \alpha x^2 + (K+1)y^2 + (K+1)z^2 - (f-K)\alpha x - gy - K\alpha f = 0. \end{cases}$$

Исключим из целевой функции $y^2 + z^2$ с помощью ограничения:

$$\left(1 - \frac{\alpha}{K+1}\right)x^2 + \left(\frac{\alpha(f-K)}{K+1} + 2K\right)x + \frac{g}{K+1}y + \frac{K\alpha f}{K+1} \to \text{extr}.$$

Тогда переменная z будет входить только в ограничение. Поэтому ее можно исключить:

$$\begin{cases} \left(1-\dfrac{\alpha}{K+1}\right)x^2+\left(\dfrac{\alpha(f-K)}{K+1}+2K\right)x+\dfrac{g}{K+1}y+\dfrac{K\alpha f}{K+1}\to \mathrm{extr}, \\ \alpha x^2+(K+1)y^2-\alpha(f-K)x-gy-K\alpha f\le 0. \end{cases}$$

Так как в последней задаче целевая функция линейна по y, то решение задачи достигается на границе области, т.е. неравенство в ограничении можно заменить равенством:

$$\begin{cases} \left(1-\dfrac{\alpha}{K+1}\right)x^2+\left(\dfrac{\alpha(f-K)}{K+1}+2K\right)x+\dfrac{g}{K+1}y+\dfrac{K\alpha f}{K+1}\to \mathrm{extr}, \\ \alpha x^2+(K+1)y^2-\alpha(f-K)x-gy-K\alpha f= 0. \end{cases}$$

Полученная задача представляет собой поиск максимума квадратичной функции на эллипсе. Ее можно преобразовать в задачу одномерной оптимизации, если задать эллипс параметрически. Для этого преобразуем ограничение, выделив квадраты:

$$\alpha(x-\frac{f-K}{2})^2+(K+1)(y-\frac{g}{2(K+1)})^2=R^2,$$

где

$$R^2=\frac{\alpha(f-K)^2}{4}+\frac{g^2}{4(K+1)}+K\alpha f=\frac{\alpha(f+K)^2}{4}+\frac{g^2}{4(K+1)}.$$

Далее введем замену переменных

$$x=\frac{R}{\sqrt{\alpha}}\cos\theta+\frac{f-K}{2},\qquad y=\frac{R}{\sqrt{K+1}}\sin\theta+\frac{g}{2(K+1)}.$$

Тогда получим задачу одномерной оптимизации:

$$\left(1-\frac{\alpha}{K+1}\right)\frac{R^2}{\alpha}\cos^2\theta+(f+K)\frac{R}{\sqrt{\alpha}}\cos\theta+\frac{g}{K+1}\frac{R}{\sqrt{K+1}}\sin\theta+P\to \mathrm{extr},$$

где

$$P=\left(1+\frac{\alpha}{K+1}\right)\frac{(f-K)^2}{4}+K(f-K)+\frac{g^2}{2(K+1)^2}+\frac{K\alpha f}{K+1}.$$

Здесь параметры удовлетворяют условиям $\alpha>0$, $\beta>0$, $K+1>0$. Последнее условие усилим, потребовав $K+1>\alpha$.

Используя неравенства $\cos^2\theta\le 1$, $p\cos\theta+q\sin\theta\le\sqrt{p^2+q^2}$, получим

$$\varphi_{\sup}\le\left(1-\frac{\alpha}{K+1}\right)\frac{R^2}{\alpha}+R\sqrt{\frac{(f+K)^2}{\alpha}+\frac{g^2}{(K+1)^3}}+P.$$

Подставляя параметр P в выражение, находим

$$\varphi_{\sup}\le\frac{(f-K)^2}{2}+\frac{g^2}{4\alpha(K+1)}+\frac{g^2}{4(K+1)^2}+K(2f-K)+R_1(K),$$

где

$$R_1(K)=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{(f+K)^2}{\alpha}+\frac{g^2}{(K+1)^3}\right)\left(\alpha(f+K)^2+\frac{g^2}{(K+1)}\right)}.$$

В результате получаем семейство локализирующих множеств, которые описываются неравенством

$$(x+K)^2 + y^2 + z^2 \le \frac{(f+K)^2}{2} + \frac{g^2(\alpha+K+1)}{4\alpha(K+1)^2} + R_1(K), \qquad K > (\alpha - 1).$$

Пересечение этого семейства можно описать неравенством

$$y^2 + z^2 \le \inf_{K > (\alpha-1)} \left(\frac{(f+K)^2}{2} + \frac{g^2(\alpha+K+1)}{4\alpha(K+1)^2} + R_1(K) - (x+K)^2 \right). \qquad (9)$$

Графическое изображение локализирующего множества (9) в случае $\alpha = 0{,}5$, $\beta = 3$, $f = 1{,}5$, $g = 0{,}5$ представлено на рис.1.

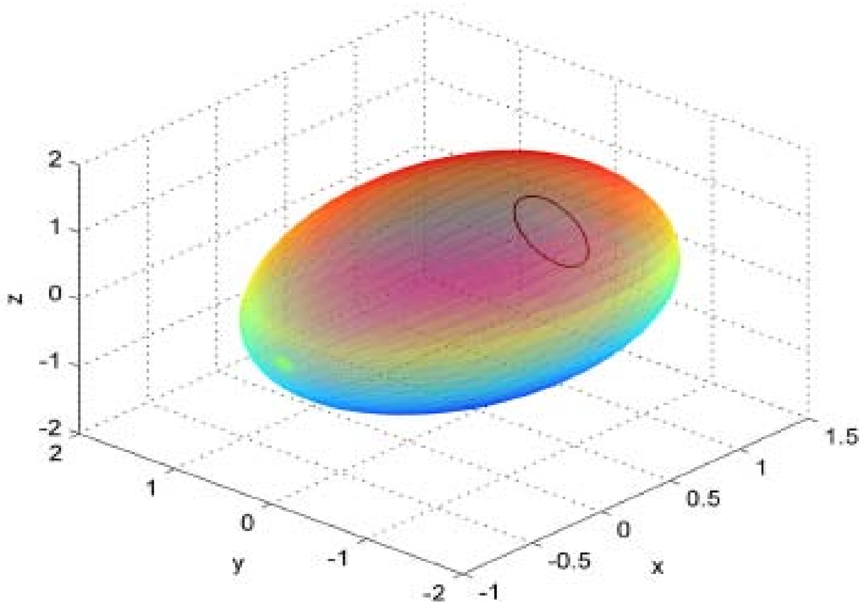

Рис.1. Ограниченная траектория системы Lorenz-84 и локализирующее множество

Заключение

В данной работе получены оценки положения инвариантных компактных множеств автономной системы Lorenz-84, используемой при построении некоторых метеорологических моделей (эта система рассматривалась и как самостоятельная модель и как составная часть более сложной модели). Рассмотрен простейший вариант системы с отсутствующими термическими перегрузками, и общий вариант системы, в которой при некоторых значениях параметров возникает хаотическая динамика. При всех значениях параметров системы построено компактное локализирующее множество. Результат частично перекрывается с результатом Старкова К. Е. [15], но дает дополнительную информацию.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 15-07-005489).

Список литературы

1. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Инвариантные компакты динамических систем. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 231 с.
2. Крищенко А.П. Локализация предельных циклов // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31, № 11. С. 1858–1865.

3. Крищенко А.П. Области существования циклов // Докл. РАН. 1997. Т. 353, № 1. С. 17–19.
4. Крищенко А.П. Локализация инвариантных компактов динамических систем // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 12. С. 1597–1604.
5. Krishchenko A. P., Starkov K.E. Localization of compact invariant sets of the Lorenz system // Phys. Lett. A. 2006. Vol. 353, no. 5. P. 383–388. DOI: 10.1016/j.physleta.2005.12.104
6. Li D., Lu J., Wu X., Chen G. Estimating the bounds for the Lorenz family of chaotic systems // Chaos, Solitons and Fractals. 2005. Vol. 23, no. 2. P. 529–534. DOI: 10.1016/j.chaos.2004.05.021
7. Канатников А.Н. Локализация инвариантных компактов ПРТ-системы // Вестник МГТУ. Сер. Естественные науки. 2007. № 1. С. 3–18.
8. Krishchenko A. P., Starkov K.E. Localization of compact invariant sets of nonlinear systems with application to the Lanford systems // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2006. Vol. 16, iss. 11. P. 3249–3256. DOI: 10.1142/S0218127406016768
9. Канатников А.Н., Федорова Ю.П. Локализация инвариантных компактов двумерных непрерывных динамических систем // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 7. С. 159–174. DOI: 10.7463/0713.0583104
10. Starkov K. E. Bounding a domain which contains all compact invariant sets of the Bloch system // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2009. Vol. 19, no. 3. P. 1037–1042. DOI: 10.1142/S0218127409023457
11. Starkov K. E. Bounds for the domain containing all compact invariant sets of system modeling dynamics of acoustic gravity waves // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2009. Vol. 19, no. 10. P. 3425–3432. DOI: 10.1142/S0218127409024864
12. Lorenz E.N. Irregularity: a fundamental property of the atmosphere // Tellus A. 1984. Vol. 36, no. 2. P. 98–110. DOI: 10.1111/j.1600-0870.1984.tb00230.x
13. Masoller C., Schifino A., Romanelli L. Characterization of strange attractors of Lorenz model of general circulation of the atmosphere // Chaos, Solitions and Fractals. 1995. No. 6. P. 357–366. DOI: 10.1016/0960-0779(95)80041-E
14. Shilnikov A., Nicolis G., Nicolis C. Bifurcation and predictability analysis of a low-order atmospheric circulation model // Journal of Bifurcation and chaos. 1995. Vol. 5, no. 6. P. 1701–1711. DOI: 10.1142/S0218127495001253
15. Starkov K.E. Localization of compact invariant sets of the Lorenz'1984 model // Springer Proceedings in Physics. 2009. Vol. 132. P. 915. DOI: 10.1007/978-3-642-03085-7_225

Mathematics & Mathematical Modelling
Electronic journal of the Bauman MSTU
http://mathmjournal.ru

Mathematics and Mathematical Modelling of the Bauman MSTU, 2015, no. 4, pp. 54–65.

DOI: **10.7463/mathm.0415.0812317**

Received: 24.09.2015

Localization of Compact Invariant Sets of the Lorenz'1984 System

Ramazanova Kh. M.[1,*]

[*] xadi91@yandex.ru

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: localization, localizing set, invariant compact set, Lorenz'1984 model

Localization of compact invariant sets of a dynamical system is one way to conduct a qualitative analysis of dynamical system. The localization task is aimed at evaluating the location of invariant compact sets of systems, which are equilibrium, periodic trajectories, attractors and repellers, and invariant tori. Such sets and their properties largely determine the structure of the phase portrait of the system. For this purpose, one can use a localization set, i.e. a set in the phase space of the system that contains all invariant compact sets.

This article considers the problem of localization of invariant compact sets of an Autonomous version of the Lorenz-84 system. The system represents a simple model of the General circulation of the atmosphere in middle latitudes. The model was used in various climatological studies. To build localization set of the system the so-called functional localization method is applied. The article describes the main provisions of this method, lists the main properties of the localization sets. The simplest version of the Lorenz-84 system when there are no thermal loads is analyzed, and a common variant of the Autonomous Lorenz-84 system, in which for some values of system parameters chaotic dynamics occurs is investigated. In the first case it is shown that the only invariant compact set of the system is its equilibrium position, and localization function turned out to be a Lyapunov function of the system. For the General version of the system a family of localization sets is built and the intersection of this family is described. Graphical illustration for the localization set at fixed values of the parameters is shown. The result of the study partially overlaps with the result of K.E. Starkov on the subject, but provides additional information.

The theme of localization of invariant compact sets is discussed quite actively in the literature. Research focuses both on the development of the method and its application to dynamical systems of other classes, and on the investigation of specific dynamical systems.

References

1. Kanatnikov A.N., Krishchenko A.P. *Invariantnye kompakty dinamicheskih sistem* [Compact invariant sets of dynamical systems]. Moscow, Bauman MSTU publ., 2011, 232 p. (in Russian)

2. Krishchenko A.P. Localization of limit cycles. *Differentsial'nye uravneniya*, 1995, vol. 31, no. 11, pp. 1858–1865 (English translation: *Differential Equations*, 1995, vol. 31, no. 11, pp. 1826–1833).
3. Krishchenko A.P. Domains of Existence of Cycles. *Doklady Akademii nauk*. 1997, vol. 353, no. 1, p. 17–19. (English translation: *Doklady Mathematics*, 1997, vol. 55, pp. 176–178).
4. Krishchenko A.P. Localization of invariant compact sets of dynamical systems. *Differentsial'nye Uravneniya*, 2005, vol. 41, no. 12, pp. 1597–1604 (English version of journal: *Differential Equations*, 2005, vol. 41, no. 12, pp. 1669–1676).
5. Krishchenko A.P., Starkov K.E. Localization of compact invariant sets of the Lorenz system. *Phys. Lett. A*, 2006, vol. 353, no. 5. pp. 383–388. DOI: 10.1016/j.physleta.2005.12.104
6. Li D., Lu J., Wu X., Chen G. Estimating the bounds for the Lorenz family of chaotic systems, *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, vol. 23, no. 2. pp. 529–534. DOI: 10.1016/j.chaos.2004.05.021
7. Kanatnikov A.N. Localization of Invariant Compact Sets of PRT-System. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki = Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural Sciences*, 2007. no. 1, pp. 3–18. (in Russian)
8. Krishchenko A. P., Starkov K.E. Localization of compact invariant sets of nonlinear systems with application to the Lanford systems. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 2006, vol. 16, iss. 11, pp. 3249–3256. DOI: 10.1142/S0218127406016768
9. Kanatnikov A.N., Fedorova Yu.P. Localization of invariant compact sets of two-dimensional continuous dynamical systems. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* = *Science and Education of the Bauman MSTU*, 2013, no. 7, pp. 159–174. DOI: 10.7463/0713.0583104 (in Russian).
10. Starkov K. E. Bounding a domain which contains all compact invariant sets of the Bloch systemю *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 2009, vol. 19, no. 3, pp. 1037–1042. DOI: 10.1142/S0218127409023457
11. Starkov K. E. Bounds for the domain containing all compact invariant sets of system modeling dynamics of acoustic gravity waves. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 2009, vol. 19, no. 10, pp. 3425–3432. DOI: 10.1142/S0218127409024864
12. Lorenz E.N. Irregularity: a fundamental property of the atmosphere. *Tellus A*, 1984, vol. 36, no. 2, pp. 98–110. DOI: 10.1111/j.1600-0870.1984.tb00230.x
13. Masoller C., Schifino A., Romanelli L. Characterization of strange attractors of Lorenz model of general circulation of the atmosphere. *Chaos, Solitions and Fractals*, 1995, no. 6, p. 357–366. DOI: 10.1016/0960-0779(95)80041-E
14. Shilnikov A., Nicolis G., Nicolis C. Bifurcation and predictability analysis of a low-order atmospheric circulation model. *Journal of Bifurcation and chaos*, 1995, vol. 5, no. 6, pp. 1701–1711. DOI: 10.1142/S0218127495001253
15. Starkov K.E. Localization of compact invariant sets of the Lorenz’1984 model. *Springer Proceedings in Physics*, 2009, vol. 132, p. 915. DOI: 10.1007/978-3-642-03085-7_225