Математика и математическое моделирование. 2019. № 5. С. 15–31.
DOI: 10.24108/mathm.0519.0000202

Математика и Математическое моделирование
Сетевое научное издание
http://mathmelpub.ru ISSN 2412-5911

УДК 517.926

О симметричных решениях линейных нестационарных матричных дифференциальных уравнений

Фетисов Д. А.[1,*]

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
[*] dfetisov@yandex.ru

В работе рассматривается проблема симметричности решений линейных нестационарных матричных дифференциальных уравнений с коэффициентами конечной степени гладкости. Доказывается достаточное условие симметричности решения на заданном интервале. Показывается, что если все производные решения до некоторого порядка включительно, вычисленные в силу уравнения, симметричны в начальной точке и две матричные последовательности, связанные с уравнением, удовлетворяют заданному набору свойств, то решение симметрично на всем интервале. Приводятся примеры задач Коши, симметричность решений которых доказывается с помощью предложенного условия. В предположении, что указанное условие выполнено, устанавливаются формула, описывающая симметричные решения уравнения, и неравенство, позволяющее оценить нормы этих решений.

Ключевые слова: линейное матричное дифференциальное уравнение; задача Коши; симметричное решение

Представлена в редакцию: 05.12.2019.

Введение

Матричные дифференциальные уравнения на протяжении многих десятилетий вызывают большой интерес как математиков, так и исследователей, специализирующихся на решении прикладных задач. Одним из наиболее актуальных приложений матричных дифференциальных уравнений является теория управления: матричное дифференциальное уравнение Ляпунова [1, 2] известно как удобный инструмент исследования на устойчивость линейных нестационарных систем с управлением, матричное дифференциальное уравнение Риккати [3, 4, 5] широко применяется в теории оптимального управления.

В настоящей работе рассматриваются линейные нестационарные матричные дифференциальные уравнения $\dot{X} = A(t)X + B(t)$, необходимость исследования которых возникает, в частности, при построении решений терминальных задач для аффинных систем с управлением [6, 7]. Теоретические аспекты, связанные с нахождением решений и исследованием свойств линейных матричных дифференциальных уравнений разных порядков и разного специального вида, обсуждались в работах [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18].

В работе [19] рассматривалась проблема симметричности решений линейных матричных дифференциальных уравнений с коэффициентами, аналитическими в некоторой односвязной области комплексной плоскости. Для таких уравнений симметричность решения в односвязной области равносильна симметричности в некоторой точке из этой области всех производных решения, вычисленных в силу уравнения и начального условия.

В данной работе исследуется проблема симметричности решений линейных матричных дифференциальных уравнений с коэффициентами конечной степени гладкости. Мы устанавливаем условия, при выполнении которых по симметричности первых нескольких производных решения в начальной точке, вычисленных в силу уравнения и начального условия, можно судить о симметричности решения на заданном интервале.

1. Условие симметричности решения задачи Коши для линейного матричного дифференциального уравнения

Рассмотрим линейное нестационарное матричное дифференциальное уравнение

$$\dot{X} = A(t)X + B(t), \tag{1}$$

где $X = X(t)$ — неизвестная $n \times n$-матрица; $A(t),\ B(t) \in C^l(a,\, b)$, $l \in \mathbb{N}$ — заданные $(n{\times}n)$-матрицы. Требуется определить, когда решение $X(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию $X(t_0) = X_0$, $t_0 \in (a,\ b)$, является симметричным на интервале $(a,\ b)$.

Под симметричностью решения $X(t)$ на (a, b) понимается выполнение равенства $X^{\mathrm{T}}(t) = X(t)$ при всех $t \in (a,\ b)$. Как известно [20], из принадлежности матриц $A(t)$ и $B(t)$ классу $C^l(a,\, b)$ следует, что и любое решение уравнения (1) принадлежит классу $C^l(a,\, b)$. В работе [19] показано, что производная i-го порядка решения $X(t)$ уравнения (1) описывается формулой

$$X^{(i)}(t) = W_i(t)\, X(t) + V_i(t), \quad i = \overline{0,\, l}, \tag{2}$$

где

$$W_0(t) = E, \quad W_{i+1}(t) = \dot{W}_i(t) + W_i(t)\, A(t), \quad i = \overline{0,\, l{-}1}; \tag{3}$$

$$V_0(t) = 0, \quad V_{i+1}(t) = \dot{V}_i(t) + W_i(t)\, B(t), \quad i = \overline{0,\, l{-}1}; \tag{4}$$

E — единичная $n \times n$-матрица. Отметим, что $W_1(t) = A(t)$, $V_1(t) = B(t)$.

Пусть $X(t)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $X(t_0) = X_0$. Обозначим через $X_0^{(i)}$ производную i-го порядка решения $X(t)$, вычисленную в точке t_0. Из соотношения (2) вытекает, что $X_0^{(i)}$ описывается формулой

$$X_0^{(i)} = W_i(t_0)\, X_0 + V_i(t_0), \quad i = \overline{0,\, l}. \tag{5}$$

Установим достаточное условие симметричности решения $X(t)$ на интервале $(a,\ b)$.

Теорема 1. Пусть $A(t),\ B(t) \in C^l(a,\ b)$; $X(t)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $X(t_0) = X_0$; существует номер $m \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ l\}$, для которого:

1) матрицы $X_0^{(0)}, \ldots, X_0^{(m-1)}$ симметричны;

2) существуют функции $\lambda_0(t),\ \ldots,\ \lambda_{m-1}(t) \in C(a,\ b)$, такие, что при всех $t \in (a,\ b)$ выполнено равенство

$$W_m(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i(t)\, W_i(t) \tag{6}$$

и матрица $V(t) = V_m(t) - \sum\limits_{i=0}^{m-1} \lambda_i(t)\, V_i(t)$ симметрична на интервале $(a,\ b)$.

Тогда решение $X(t)$ симметрично на интервале $(a,\ b)$.

Доказательство. Введем в рассмотрение матрицу $Z(t)$ по формуле $Z(t) = X(t) - X^{\mathrm{T}}(t)$. Из (2) вытекает, что производная i-го порядка матрицы $X^{\mathrm{T}}(t)$ может быть вычислена по формуле

$$[X^{\mathrm{T}}(t)]^{(i)} = X^{\mathrm{T}}(t)\, W_i^{\mathrm{T}}(t) + V_i^{\mathrm{T}}(t), \quad i = \overline{0,\, l}. \tag{7}$$

Вычитая (7) из (2), приходим к следующему выражению для производной i-го порядка матрицы $Z(t)$:

$$Z^{(i)}(t) = W_i(t)\, X(t) - X^{\mathrm{T}}(t)\, W_i^{\mathrm{T}}(t) + V_i(t) - V_i^{\mathrm{T}}(t), \quad i = \overline{0,\, l}. \tag{8}$$

При $i = m$ из (8) получаем равенство

$$Z^{(m)}(t) = W_m(t)\, X(t) - X^{\mathrm{T}}(t)\, W_m^{\mathrm{T}}(t) + V_m(t) - V_m^{\mathrm{T}}(t),$$

которое с учетом соотношения (6) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} Z^{(m)}(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i(t)\, W_i(t)\, X(t) - X^{\mathrm{T}}(t) \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i(t)\, W_i^{\mathrm{T}}(t) + V_m(t) - V_m^{\mathrm{T}}(t) = \\ = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i(t)[W_i(t)\, X(t) - X^{\mathrm{T}}(t)\, W_i^{\mathrm{T}}(t)] + V_m(t) - V_m^{\mathrm{T}}(t) = \\ = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i(t)[W_i(t)\, X(t) - X^{\mathrm{T}}(t)\, W_i^{\mathrm{T}}(t) + V_i(t) - V_i^{\mathrm{T}}(t)] + \\ + V_m(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i(t)\, V_i(t) - V_m^{\mathrm{T}}(t) + \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i(t)\, V_i^{\mathrm{T}}(t). \end{aligned}$$

Используя равенства (8) и определение матрицы $V(t)$, приходим к выражению

$$Z^{(m)}(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i(t)\, Z^{(i)}(t) + V(t) - V^{\mathrm{T}}(t).$$

Из симметричности матрицы $V(t)$ следует, что

$$Z^{(m)}(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i(t) Z^{(i)}(t)$$

Таким образом, матрица $Z(t)$ удовлетворяет линейному матричному дифференциальному уравнению

$$Z^{(m)} = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i(t)\, Z^{(i)}. \tag{9}$$

Очевидно, что $Z^{(i)}(t_0) = X_0^{(i)} - [X_0^{(i)}]^{\mathrm{T}}$, $i = \overline{0,\, l}$. С учетом симметричности матриц $X_0^{(i)}$, $i = \overline{0,\, m{-}1}$, эти соотношения принимают вид $Z^{(i)}(t_0) = 0$, $i = \overline{0,\, m{-}1}$. Решением уравнения (9) с начальными условиями $Z^{(i)}(t_0) = 0$, $i = \overline{0,\, m{-}1}$, является нулевая матрица, и такое решение, согласно теореме Коши, единственно. Следовательно, $Z(t) = 0$ при всех $t \in (a,\, b)$ и $X(t) = X^{\mathrm{T}}(t)$ при всех $t \in (a,\, b)$. Теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим уравнение (1), в котором

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{\sqrt[3]{t^7}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} e^{\sqrt[3]{t^8}} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что решение $X(t)$, удовлетворяющее условию $X(0) = 0$, симметрично в $\mathbb{R}$. Построение матриц $W_i(t)$, $V_i(t)$ и $X_0^{(i)}$ по формулам (3), (4) и (5) приводит к следующему результату:

$$W_0(t) = E, \quad V_0(t) = 0, \quad X_0^{(0)} = 0,$$

$$W_1(t) = A(t), \quad V_1(t) = B(t), \quad X_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$W_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{\sqrt[3]{t^7}}\left(\dfrac{7}{3}\sqrt[3]{t^4} + 2\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V_2(t) = \begin{pmatrix} e^{\sqrt[3]{t^7}} + e^{\sqrt[3]{t^8}}\left(\dfrac{8}{3}\sqrt[3]{t^5} + 1\right) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что:

а) матрицы $X_0^{(0)}$ и $X_0^{(1)}$ симметричны;

б) матрица $W_2(t)$ представима в виде $W_2(t) = \lambda_0(t)\, W_0(t) + \lambda_1(t)\, W_1(t)$, где

$$\lambda_0(t) = -\frac{7}{3}\sqrt[3]{t^4} - 1, \quad \lambda_1(t) = \frac{7}{3}\sqrt[3]{t^4} + 2;$$

в) матрица

$$V(t) = V_2(t) - \lambda_0(t)\, V_0(t) - \lambda_1(t)\, V_1(t) = \begin{pmatrix} e^{\sqrt[3]{t^7}} + e^{\sqrt[3]{t^8}}\left(\dfrac{8}{3}\sqrt[3]{t^5} - \dfrac{7}{3}\sqrt[3]{t^4} - 1\right) & -\dfrac{7}{3}\sqrt[3]{t^4} - 1 \\ -\dfrac{7}{3}\sqrt[3]{t^4} - 1 & 0 \end{pmatrix}$$

симметрична в $\mathbb{R}$.

Согласно теореме 1, решение $X(t)$ симметрично в $\mathbb{R}$.

2. Формула для симметричного решения задачи Коши для линейного матричного дифференциального уравнения

Полагая, что выполнены условия теоремы 1, установим формулу для решения $X(t)$ уравнения (1), удовлетворяющего условию $X(t_0) = X_0$.

Лемма 1. Пусть $A(t),\ B(t) \in C^l(a,\ b)$; $X(t)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $X(t_0) = X_0$; существует номер $m \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ l\}$, для которого:

1) матрицы $X_0^{(0)}, \ldots, X_0^{(m-1)}$ симметричны,

2) существуют такие функции $\lambda_0(t), \lambda_1(t), \ldots, \lambda_{m-1}(t) \in C(a,\ b)$, что при всех $t \in (a,\ b)$ выполнено равенство (6) и матрица

$$V(t) = V_m(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i(t)\, V_i(t)$$

симметрична на интервале $(a,\ b)$.

Тогда $X(t)$ является решением линейного матричного дифференциального уравнения

$$X^{(m)} - \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i(t)\, X^{(i)} = V(t), \tag{10}$$

удовлетворяющим условиям $X^{(i)}(t_0) = X_0^{(i)}$, $i = \overline{0,\ m{-}1}$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что, согласно теореме 1, матрица $X(t)$ является симметричной при всех $t \in (a,\ b)$. Полагая $i = m$ в формулах (2), получаем $X^{(m)}(t) = W_m(t)\, X(t) + V_m(t)$. С помощью (6) запишем последнее соотношение в следующем виде:

$$X^{(m)}(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i(t)\, W_i(t)\, X(t) + V_m(t).$$

Из формул (2) вытекает, что $W_i(t)\, X(t) = X^{(i)}(t) - V_i(t)$. Следовательно,

$$X^{(m)}(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i(t)[X^{(i)}(t) - V_i(t)] + V_m(t),$$

и окончательно приходим к следующему результату:

$$X^{(m)}(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i(t)\, X^{(i)}(t) + V_m(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i(t)\, V_i(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i(t)\, X^{(i)}(t) + V(t).$$

Полученное равенство означает, что матрица $X(t)$ является решением линейного дифференциального уравнения (10). Лемма доказана.

Обозначим элементы матриц $V(t)$ и $X_0^{(i)}$ через $V_{jk}(t)$ и $X_{0,jk}^{(i)}$, $j,\ k = \overline{1,\ n}$, $i = \overline{0,\ m{-}1}$. Каждый элемент $X_{jk}(t)$ матрицы $X(t)$ удовлетворяет скалярному уравнению

$$\varphi^{(m)} - \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i(t)\varphi^{(i)} = V_{jk}(t), \tag{11}$$

и начальным условиям

$$\varphi^{(i)}(t_0) = X_{0,jk}^{(i)}, \quad i = \overline{0,\, m{-}1}. \tag{12}$$

Пусть $\varphi_j(t,\tau)$, $j = \overline{0,\, m{-}1}$, — решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$\varphi^{(m)} - \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i(t)\, \varphi^{(i)} = 0, \tag{13}$$

удовлетворящее условиям

$$\frac{\partial^i}{\partial t^i}\varphi_j(t,\tau)\bigg|_{t=\tau} = \begin{cases} 1, & j = i; \\ 0, & j \neq i \end{cases} \qquad i = \overline{0,\, m{-}1},$$

так что функции $\varphi_0(t,\tau)$, $\varphi_1(t,\tau)$, $\ldots$, $\varphi_{m-1}(t,\tau)$ образуют нормальную фундаментальную систему решений уравнения (13) с начальными условиями в точке $t = \tau$.

Теорема 2. Пусть $A(t)\; B(t) \in C^l(a,\, b)$; $X(t)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $X(t_0) = X_0$; существует номер $m \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ l\}$, для которого:

1) матрицы $X_0^{(0)}, \ldots, X_0^{(m-1)}$ симметричны,

2) существуют такие функции $\lambda_0(t),\ \lambda_1(t),\ \ldots,\ \lambda_{m-1}(t) \in C(a,\, b)$, что при всех $t \in (a,\, b)$ выполнено равенство (6) и матрица

$$V(t) = V_m(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i(t)\, V_i(t)$$

симметрична на интервале $(a,\, b)$.

Тогда $X(t)$ описывается формулой

$$X(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_i(t,t_0)\, X_0^{(i)} + \int_{t_0}^{t} \varphi_{m-1}(t,\tau)\, V(\tau)\, d\tau. \tag{14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$\varphi^{(m)} - \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i(t)\, \varphi^{(i)} = v(t),$$

где $v(t) \in C(a,\, b)$, и задачу Коши для него, состоящую в нахождении решения $\varphi(t)$, удовлетворяющего условиям $\varphi^{(i)}(t_0) = p_i$, $p_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0,\, m{-}1}$. Известно, что решение $\varphi(t)$ описывается формулой [20]

$$\varphi(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_i(t) p_i + \int_{t_0}^{t} \varphi_{m-1}(t,\tau)\, v(\tau)\, d\tau.$$

Применяя эту формулу к уравнению (11) и начальным условиям (12), получаем, что каждый элемент $X_{jk}(t)$ матрицы $X(t)$ задается выражением

$$X_{jk}(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_i(t)\, X_{0,jk}^{(i)} + \int_{t_0}^{t} \varphi_{m-1}(t,\tau)\, V_{jk}(\tau)\, d\tau,$$

и, следовательно, сама матрица $X(t)$ имеет вид (14). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. В простейших случаях с помощью леммы 1 и теоремы 2 можно найти симметричное решение $X(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию $X(t_0) = X_0$.

Пример 2. Рассмотрим уравнение (1), в котором

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 & 2e^t \\ -e^{-t} & 1 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & 2 \\ 2 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Покажем, что решение $X(t)$, удовлетворяющее начальному условию $X(0) = 0$, симметрично в $\mathbb{R}$ и найдем $X(t)$.

Построение матриц $W_i(t)$, $V_i(t)$ и $X_0^{(i)}$ по формулам (3), (4) и (5) приводит к следующему результату:

$$W_0(t) = E, \quad V_0(t) = 0, \quad X_0^{(0)} = 0,$$

$$W_1(t) = A(t), \quad V_1(t) = B(t), \quad X_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$W_2(t) = \begin{pmatrix} -1 & 2e^t \\ e^{-t} & -1 \end{pmatrix}, \quad V_2(t) = \begin{pmatrix} 4e^t & 0 \\ 0 & -2e^{-t} \end{pmatrix}, \quad X_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$W_3(t) = \begin{pmatrix} -1 & 2e^t \\ -e^{-t} & 1 \end{pmatrix}, \quad V_3(t) = \begin{pmatrix} 6e^t & 0 \\ 0 & 3e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что:

а) матрицы $X_0^{(0)}$, $X_0^{(1)}$ и $X_0^{(2)}$ симметричны;

б) матрица $W_3(t)$ совпадает с матрицей $W_1(t)$ и, следовательно, представима в виде

$$W_3(t) = \lambda_0(t)\, W_0(t) + \lambda_1(t)\, W_1(t) + \lambda_2(t)\, W_2(t),$$

где $\lambda_0(t) = 0$, $\lambda_1(t) = 1$, $\lambda_2(t) = 0$;

в) матрица

$$V(t) = V_3(t) - \lambda_2(t)\, V_2(t) - \lambda_1(t)\, V_1(t) - \lambda_0(t)\, V_0(t) = V_3(t) - V_1(t) = \begin{pmatrix} 4e^t & -2 \\ -2 & 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

симметрична в $\mathbb{R}$.

Следовательно, решение $X(t)$ симметрично при всех t. Согласно лемме 1, $X(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $X''' - X' = V(t)$ и начальным условиям

$$X(0) = 0, \quad X'(0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}), \quad X''(0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что:

а) решением уравнения $X_{11}''' - X_{11}' = 4e^t$, удовлетворяющим начальным условиям $X_{11}(0) = 0$, $X_{11}' = 2$, $X_{11}''(0) = 4$, является функция $X_{11}(t) = 2te^t$;

б) решением уравнения $X_{12}''' - X_{12}' = -2$, удовлетворяющим начальным условиям $X_{12}(0) = 0$, $X_{12}' = 2$, $X_{12}''(0) = 0$, является функция $X_{12}(t) = 2t$;

в) решением уравнения $X_{22}''' - X_{22}' = 2e^{-t}$, удовлетворяющим начальным условиям $X_{22}(0) = 0$, $X_{22}' = 1$, $X_{22}''(0) = -2$, является функция $X_{22}(t) = te^{-t}$.

Следовательно, решение $X(t)$ имеет вид

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2te^t & 2t \\ 2t & te^{-t} \end{pmatrix}.$$

В более сложных случаях теорема 2 позволяет получить оценки симметричных решений уравнения (1). Под нормой вектора $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$ далее будем понимать евклидову норму:

$$\|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} y_i^2},$$

под нормой $(m \times m)$-матрицы Y — спектральную норму: $\|Y\| = \sqrt{\mu_{\max}}$, где $\mu_{\max}$ — наибольшее собственное значение матрицы $Y^{\mathrm{T}}Y$.

3. Оценки симметричных решений линейных матричных дифференциальных уравнений

Докажем сначала следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2. Пусть

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \ldots & y_m \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_{m-1} \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Тогда $\|Y\| = \|y\|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку

$$Y^{\mathrm{T}}Y = \begin{pmatrix} y_1^2 & y_1y_2 & y_1y_3 & \cdots & y_1y_m \\ y_1y_2 & y_2^2 & y_2y_3 & \cdots & y_3y_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1y_m & y_2y_m & y_3y_m & \cdots & y_m^2 \end{pmatrix},$$

то

$$\det(Y^{\mathrm{T}}Y-\mu E)=\begin{vmatrix} y_1^2-\mu & y_1y_2 & y_1y_3 & \ldots & y_1y_m \\ y_1y_2 & y_2^2-\mu & y_2y_3 & \ldots & y_3y_m \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ y_1y_m & y_2y_m & y_3y_m & \ldots & y_m^2-\mu \end{vmatrix}.$$

Если $y_i=0$ для всех $i=\overline{1,\,m}$, то, очевидно, $\|Y\|=\|y\|=0$.

Предположим теперь, что хотя бы один элемент вектора y, например, y_1, отличен от нуля. Для $i=\overline{2,\,m}$ из i-й строки определителя $\det(Y^{\mathrm{T}}Y-\mu E)$ вычтем его первую строку, умноженную на y_i/y_1. В результате получим

$$\det(Y^{\mathrm{T}}Y-\mu E)=\begin{vmatrix} y_1^2-\mu & y_1y_2 & y_1y_3 & \ldots & y_1y_m \\ \mu y_2/y_1 & -\mu & 0 & \ldots & 0 \\ \mu y_3/y_1 & 0 & -\mu & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ \mu y_m/y_1 & 0 & 0 & \ldots & -\mu \end{vmatrix}.$$

Вынесем общий множитель μ из всех строк определителя, начиная со второй:

$$\det(Y^{\mathrm{T}}Y-\mu E)=\mu^{m-1}\begin{vmatrix} y_1^2-\mu & y_1y_2 & y_1y_3 & \ldots & y_1y_m \\ y_2/y_1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ y_3/y_1 & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ y_m/y_1 & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{vmatrix}.$$

Сложим первую строку этого определителя с линейной комбинацией остальных строк, в которой коэффициент при i-й строке равен y_1y_i, $i=\overline{2,\,m}$. В результате получим определитель нижней треугольной матрицы:

$$\det(Y^{\mathrm{T}}Y-\mu E)=\mu^{m-1}\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{m}y_i^2-\mu & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ y_2/y_1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ y_3/y_1 & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ y_m/y_1 & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{pmatrix},$$

который, как известно, равен произведению элементов, расположенных на главной диагонали:

$$\det(Y^{\mathrm{T}}Y-\mu E)=\mu^{m-1}(-1)^{m-1}\left(\sum_{i=1}^{m}y_i^2-\mu\right)=(-1)^m\mu^{m-1}(\mu-\|y\|^2).$$

Отсюда видно, что собственными значениями матрицы $Y^{\mathrm{T}}Y$ являются числа $\mu_1=0$ и $\mu_2=\|y\|^2$, поэтому $\|Y\|=\max\{0,\ \|y\|\}=\|y\|$. Теорема доказана.

Лемма 3. Пусть $\varphi_0(t,\tau),\ldots,\varphi_{m-1}(t,\tau)$ — нормальная фундаментальная система решений с начальными условиями в точке $t=\tau$ для линейного однородного уравнения (13) с коэффициентами $\lambda_0(t), \ldots, \lambda_{m-1}(t) \in C(\mathbb{R})$. Тогда при $t \geqslant \tau$ справедлива оценка

$$|\varphi_{i-1}(t,\tau)| \leqslant \Lambda(t,\tau), \quad i = \overline{1,\, m}, \tag{15}$$

где

$$\Lambda(t,\tau) = \exp\biggl(\int\limits_{\tau}^{t} \|\lambda(\xi)\|\, d\xi\biggr), \quad \lambda(t) = \bigl(\lambda_0(t),\ \lambda_1(t) \ldots,\ \lambda_{m-1}(t)\bigr)^{\mathrm{T}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначения $z_1 = \varphi$, $z_2 = \dot{\varphi}, \ldots, z_m = \varphi^{(m-1)}$ и запишем уравнение (13) в виде системы:

$$\dot{z} = C(t)z, \tag{16}$$

где

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \ldots \\ z_m \end{pmatrix}, \quad C(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \lambda_0(t) & \lambda_1(t) & \lambda_2(t) & \ldots & \lambda_{m-1}(t) \end{pmatrix}.$$

Если $z(t)$ — произвольное решение системы (16), то для любого $\tau \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$z(t) = z(\tau) + \int\limits_{\tau}^{t} C(\xi)\, z(\xi)\, d\xi.$$

Применяя неравенство треугольника и теорему об оценке интеграла, заключаем, что для всех $t \geqslant \tau$

$$\|z(t)\| \leqslant \|z(\tau)\| + \int\limits_{\tau}^{t} \|C(\xi)\|\, \|z(\xi)\|\, d\xi.$$

Согласно лемме 2, $\|C(\xi)\| = \|\lambda(\xi)\|$ при всех $\xi \in [\tau,\ t]$, поэтому при $t \geqslant \tau$

$$\|z(t)\| \leqslant \|z(\tau)\| + \int\limits_{\tau}^{t} \|\lambda(\xi)\|\, \|z(\xi)\|\, d\xi.$$

Воспользовавшись дифференциальным неравенством Гронуолла — Беллмана, получим, что для любых t и τ, таких, что $t \geqslant \tau$, справедлива оценка

$$\|z(t)\| \leqslant \|z(\tau)\| \exp\biggl(\int\limits_{\tau}^{t} \|\lambda(\xi)\|\, d\xi\biggr) = \|z(\tau)\|\Lambda(t,\tau). \tag{17}$$

Обозначим через $z^i(t,\tau)$ решение системы (16), удовлетворяющее условиям

$$z^i_j(\tau,\tau) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \qquad i,\, j = \overline{1,\, m},$$

так что $z^1(t,\tau)$, $z^2(t,\tau)$, $\ldots$, $z^m(t,\tau)$ — нормальная фундаментальная система решений для (16) с начальными условиями в точке $t = \tau$. Поскольку $\|z^i(\tau,\tau)\| = 1$, то из оценки (17) получаем, что при всех $t \geqslant \tau$ справедливо неравенство $\|z^i(t,\tau)\| \leqslant \Lambda(t,\tau)$. Так как $\varphi_{i-1}(t,\tau) = z_1^i(t,\tau)$, то при $t \geqslant \tau$ имеем

$$|\varphi_{i-1}(t,\tau)| \leqslant \|z^i(t,\tau)\| \leqslant \Lambda(t,\tau), \quad i = \overline{1,\, m}.$$

Полученная оценка завершает доказательство леммы.

Теорема 3. Пусть $A(t),\, B(t) \in C^l(\mathbb{R})$; $X(t)$ — решение уравнения (1) с начальным условием $X(t_0) = X_0$; существует номер $m \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ l\}$, для которого:

1) матрицы $X_0^{(0)}$, $X_0^{(1)}, \ldots, X_0^{(m-1)}$ симметричны;

2) существуют такие функции $\lambda_0(t),\ \lambda_1(t),\ \ldots,\ \lambda_{m-1}(t) \in C(\mathbb{R})$, что при всех t выполнено равенство (6) и матрица

$$V(t) = V_m(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i(t)\, V_i(t)$$

симметрична в $\mathbb{R}$.

Тогда норма решения $X(t)$ при $t \geqslant t_0$ удовлетворяет неравенству

$$\|X(t)\| \leqslant \Lambda(t,t_0) \sum_{i=0}^{m-1} \|X_0^{(i)}\| + \int_{t_0}^{t} \Lambda(t,\tau)\, \|V(t)\|\, d\tau. \tag{18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что при выполнении условий теоремы решение $X(t)$ симметрично при всех t и описывается формулой (14). Оценим норму матрицы $X(t)$ при $t \geqslant t_0$. Используя неравенство треугольника, теорему об оценке интеграла и неравенства (15), получаем, что при $t \geqslant t_0$

$$\begin{aligned}\|X(t)\| &= \left\| \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_i(t,t_0)\, X_0^{(i)} + \int_{t_0}^{t} \varphi_{m-1}(t,\tau)\, V(\tau)\, d\tau \right\| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{m-1} |\varphi_i(t,t_0)|\, \|X_0^{(i)}\| + \int_{t_0}^{t} |\varphi_{m-1}(t,\tau)|\, \|V(\tau)\|\, d\tau \leqslant \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{m-1} \Lambda(t,t_0)\, \|X_0^{(i)}\| + \int_{t_0}^{t} \Lambda(t,\tau)\, \|V(\tau)\|\, d\tau.\end{aligned}$$

Полученное неравенство завершает доказательство теоремы.

Пример 3. Рассмотрим уравнение (1), в котором матрицы $A(t)$ и $B(t)$ заданы следующим образом:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{-2t} \\ 2e^{-2t} & 1 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} t & 2(t+1)e^{-2t} - 2 \\ 2(t+1)e^{-2t} - 2 & 2t \end{pmatrix}.$$

Покажем, что решение $X(t)$ этого уравнения с начальным условием $X(0) = 0$ является симметричным при всех t, и найдем оценку для $\|X(t)\|$ при $t \geqslant 0$.

Вычисляя матрицы $W_i(t)$, $V_i(t)$ и $X_0^{(i)}$ по формулам (3), (4) и (5), придем к следующему результату:

$$W_0(t) = E, \quad V_0(t) = 0, \quad X_0^{(0)} = 0, W_1(t) = A(t), \quad V_1(t) = B(t), \quad X_0^{(1)} = 0,$$
$$W_2(t) = \begin{pmatrix} 1 + 2e^{-4t} & 0 \\ 0 & 1 + 2e^{-4t} \end{pmatrix}, \quad V_2(t) = \begin{pmatrix} c(t) & 0 \\ 0 & 2c(t) \end{pmatrix},$$

где $c(t) = 1 + t + 2te^{-4t} + 2e^{-4t} - 2e^{-2t} > 0$, $t \geqslant 0$.

Легко видеть, что:

а) матрицы $X_0^{(0)}$, $X_0^{(1)}$ симметричны;

б) матрица $W_2(t)$ представима в виде

$$W_2(t) = \lambda_0(t)\, W_0(t) + \lambda_1(t)\, W_1(t),$$

где $\lambda_0(t) = 1 + 2e^{-4t}$, $\lambda_1(t) = 0$;

в) матрица $V(t) = V_2(t) - \lambda_1(t)\, V_1(t) - \lambda_0(t)\, V_0(t) = V_2(t)$ симметрична в $\mathbb{R}$.

Таким образом, условия теоремы 1 выполнены при $m = 2$. Следовательно, решение $X(t)$ симметрично при всех $t \in \mathbb{R}$.

Так как $X_0^{(0)} = X_0^{(1)} = 0$ и $t_0 = 0$, оценка (18) принимает вид

$$\|X(t)\| \leqslant \int\limits_0^t \Lambda(t,\tau)\, \|V(t)\|\, d\tau.$$

Поскольку $\lambda(t) = (1 + 2e^{-4t},\ 0)^{\mathrm{T}}$, то

$$\Lambda(t,\tau) = \exp\biggl(\int\limits_\tau^t \|\lambda(\xi)\|\, d\xi\biggr) = \exp\biggl(\int\limits_\tau^t (1 + 2e^{-4\xi})\, d\xi\biggr) = \exp\Bigl(t - \tau - \frac{1}{2}e^{-4t} + \frac{1}{2}e^{-4\tau}\Bigr).$$

Нетрудно видеть, что на множестве $0 \leqslant \tau \leqslant t$ выполнено неравенство $\Lambda(t,\tau) \leqslant \tilde{\Lambda}(t,\tau)$, где $\tilde{\Lambda}(t,\tau) = e^{t-\tau+1/2}$. Следовательно, имеет место оценка

$$\|X(t)\| \leqslant \int\limits_0^t \tilde{\Lambda}(t,\tau) \cdot 2c(\tau)\, d\tau = \sqrt{e}\,\Bigl(-4 - 2t + \frac{292}{75}e^t + \frac{2}{3}e^{-2t} - \frac{2}{25}e^{-4t}(7 + 10t)\Bigr).$$

Заключение

В работе доказано достаточное условие симметричности решения задачи Коши для линейного нестационарного матричного дифференциального уравнения. Показано, что если первые несколько производных решения, вычисленные в силу уравнения и начального условия, симметричны в начальной точке $t_0 \in (a,b)$, то при выполнении ряда дополнительных условий на две специальные последовательности матриц решение симметрично и на всем интервале (a,b). В предположении, что указанное условие выполнено, получены формула для симметричного решения и оценка нормы симметричного решения. Результаты работы могут быть применены для решения различных задач управления линейными и нелинейными системами.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №17-07-00653).

Список литературы

1. Bellman R. Introduction to matrix analysis. N.Y.: McGraw-Hill, 1960. 328 p.
2. Mori T., Fukuma N., Kuwahara M. On the Lyapunov matrix differential equation // IEEE Trans. on Automatic Control. 1986. Vol. 31, no. 9. Pp. 868-869. DOI: 10.1109/TAC.1986.1104416
3. Reid W.T. Riccati differential equations. N.Y.: Academic Press, 1972. 216 p.
4. Knobloch H.W., Pohl M. On Riccati matrix differential equations // Results in Mathematics. 1997. Vol. 31, no. 3-4. Pp. 337–364. DOI: 10.1007/BF03322169
5. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.
6. Фетисов Д.А. Об одном методе решения терминальных задач для аффинных систем // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 11. С. 383–400. DOI: 10.7463/1113.0622543
7. Фетисов Д.А. Решение терминальных задач для многомерных аффинных систем на основе преобразования к квазиканоническому виду // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2014. № 5. С. 16–31.
8. Apostol T.M. Explicit formulas for solutions of the second order matrix differential equation $Y'' = AY$ // Amer. Math. Monthly. 1975. Vol. 82, no. 2. Pp. 159–162. DOI: 10.2307/2319663
9. Ruiz-Claeyssen J.C., Tsukazan T. Dynamic solutions of linear matrix differential equations // Quarterly of Applied Mathematics. 1990. Vol. 48, no. 1. Pp. 169–179. DOI: 10.1090/qam/1040240
10. Verde-Star L. Operator identities and the solution of linear matrix difference and differential equations // Studies in Applied Mathematics. 1994. Vol. 91, no. 2. Pp. 153–177. DOI: 10.1002/sapm1994912153
11. Verde-Star L. Solutions of linear differential equations by the method of divided differences // Advances in Applied Mathematics. 1995. Vol. 16, no. 4. Pp. 484–508. DOI: 10.1006/aama.1995.1023
12. Verde-Star L. On linear matrix differential equations // Advances in Applied Mathematics. 2007. Vol. 39, no. 3. Pp. 329–344. DOI: 10.1016/j.aam.2006.06.002
13. Ben Taher R., Rachidi M. Linear matrix differential equations of higher-order and applications // Electronic J. of Differential Equations. 2008. Vol. 2008, no. 95. Pp. 1–12. Режим доступа: http://ejde.math.unt.edu/Volumes/2008/95/bentaher.pdf (дата обращения 03.12.2019).

14. Деревенский В.П. Матричные линейные дифференциальные уравнения высших порядков // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29, № 4. С. 711–714.

15. Деревенский В.П. Матричные двусторонние линейные дифференциальные уравнения // Математические заметки. 1994. Т. 55, № 1. С. 35–42.

16. Деревенский В.П. Матричные линейные дифференциальные уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31, № 11. С. 1925–1926.

17. Деревенский В.П. Системы матричных линейных дифференциальных уравнений первого порядка // Математические заметки. 1999. Т. 66, № 1. С. 63–75. DOI: 10.4213/mzm1142

18. Деревенский В.П. Матричные дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными // Изв. высш. учеб. заведений. Сер. Математика. 2010. № 7. С. 43–55.

19. Фетисов Д.А. К вопросу о симметричности решений линейных матричных дифференциальных уравнений // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2016. № 3. С. 16–26. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-3-16-26

20. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с. [Hartman Ph. Ordinary differential equations. N.Y.: Wiley, [1964]. 612 p.].

Mathematics and Mathematical Modeling, 2019, no. 5, pp. 15–31.
DOI: **10.24108/mathm.0519.0000202**

Mathematics & Mathematical Modelling
Electronic journal
http://mathmelpub.ru ISSN 2412-5911

On Symmetric Solutions of Linear Time-Varying Matrix Differential Equations

D. A. Fetisov[1,*]

[1]Bauman Moscow State Technical University, Russia
[*] dfetisov@yandex.ru

Keywords: linear matrix differential equation, initial value problem, symmetric solution

Received: 05.12.2019.

Linear matrix differential equations are of great interest to many branches of science and technology. For instance, an analysis of solutions to linear time-varying matrix differential equations may be required when solving terminal control problems for nonlinear control systems.

It has been proven recently that a solution to the initial value problem for a linear matrix differential equation with analytical coefficients is symmetric in a simply connected domain of the complex plane if and only if all the derivatives of the solution calculated along trajectories of the equation are symmetric at the initial point. In the paper, we address the problem of solutions symmetry for linear time-varying matrix differential equations with coefficients of a finite degree of smoothness. First of all, we prove a sufficient condition for the solution symmetry on a given interval. To check whether or not the solution of an initial value problem is symmetric on an interval, one should construct two special matrix sequences and calculate successive derivatives of the solution along trajectories of the equation. If all the derivatives up to some order are symmetric at the initial point and a given set of properties is met for the matrix sequences, then the solution is symmetric over the whole interval.

Provided the proposed condition is met, we establish a formula for symmetric solutions of the equation. We demonstrate how this formula enables us to find a symmetric solution to the equation in the case when direct solving does not seem possible for the original equation. Finally, we show that the obtained formula can be applied to construct estimates for symmetric solutions of the equation. This is especially meaningful in the case when the direct use of the formula does not simplify appropriate calculations to find solutions to the original equation.

Further research in this field should be aimed at obtaining novel estimates for the spectrum bounds of symmetric solutions to linear matrix time-varying differential equations. The results of the present work may be interesting for those who deal with constructing solutions to terminal problems for nonlinear control systems.

References

1. Bellman R. *Introduction to matrix analysis*. N.Y.: McGraw-Hill, 1960. 328 p.
2. Mori T., Fukuma N., Kuwahara M. On the Lyapunov matrix differential equation. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1986, vol. 31, no. 9, pp. 868-869. DOI: 10.1109/TAC.1986.1104416
3. Reid W.T. Riccati differential equations. N.Y.: Academic Press, 1972. 216 p.
4. Knobloch H.W., Pohl M. On Riccati matrix differential equations. *Results in Mathematics*, 1997, vol. 31, no. 3-4, pp. 337–364. DOI: 10.1007/BF03322169
5. Poliak B.T., Shcherbakov P.S. *Robastnaia ustojchivost' i upravlenie* [Robust stability and control]. Moscow: Nauka Publ., 2002. 303 p. (in Russian).
6. Fetisov D.A. A method for solving terminal control problems for affine systems. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2013, no. 11, pp. 383–400. DOI: 10.7463/1113.0622543 (in Russian)
7. Fetisov D.A. Solving of terminal problems for multidimensional affine systems based on transformation to a quasicanonical form. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Estestvennye nauki* [Herald of the BMSTU. Natural Sciences], 2014, no. 5, pp. 16–31 (in Russian).
8. Apostol T.M. Explicit formulas for solutions of the second order matrix differential equation $Y'' = AY$. *Amer. Math. Monthly*, 1975, vol. 82, no. 2, pp. 159–162. DOI: 10.2307/2319663
9. Ruiz-Claeyssen J.C., Tsukazan T. Dynamic solutions of linear matrix differential equations. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1990, vol. 48, no. 1, pp. 169–179. DOI: 10.1090/qam/1040240
10. Verde-Star L. Operator identities and the solution of linear matrix difference and differential equations. *Studies in Applied Mathematics*, 1994, vol. 91, no. 2, pp. 153–177. DOI: 10.1002/sapm1994912153
11. Verde-Star L. Solutions of linear differential equations by the method of divided differences. *Advances in Applied Mathematics*, 1995, vol. 16, no. 4, pp. 484–508. DOI: 10.1006/aama.1995.1023
12. Verde-Star L. On linear matrix differential equations. *Advances in Applied Mathematics*, 2007, vol. 39, no. 3, pp. 329–344. DOI: 10.1016/j.aam.2006.06.002
13. Ben Taher R., Rachidi M. Linear matrix differential equations of higher-order and applications. *Electronic J. of Differential Equations*, 2008, vol. 2008, no. 95, pp. 1–12. Available at: http://ejde.math.unt.edu/Volumes/2008/95/bentaher.pdf, accessed 03.12.2019.

14. Derevenskii V.P. Higher order matrix linear differential equations. *Differential Equations*, 1993, vol. 29, no. 4, pp. 605–609.

15. Derevenskii V.P. Matrix two-sided linear differential equations. *Mathematical Notes*, 1994, vol. 55, no. 1-2, pp. 24-29. DOI: 10.1007/BF02110760

16. Derevenskii V.P. Second-order matrix linear differential equations. *Differential Equations*, 1995, vol. 31, no. 11, pp. 1896–1898.

17. Derevenskii V.P. Systems of matrix linear differential equations of first order. *Mathematical Notes*, 1999, vol. 66, no. 1, pp. 51–61. DOI: 10.1007/BF02674070

18. Derevenskii V.P. Matrix differential equations with separation of variables. *Russian Mathematics*, 2010, vol. 54, no. 7, pp. 37–48. DOI: 10.3103/S1066369X10070042

19. Fetisov D.A. To the problem of solution symmetry for linear matrix differential equations. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Estestvtnnye nauki* [Herald of the BMSTU. Natural Sciences], 2016, no. 3, pp. 16–26. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-3-16-26 (in Russian)

20. Hartman Ph. *Ordinary differential equations*. N.Y.: Wiley, [1964]. 612 p. (Russ. ed.: Hartman Ph. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniia*. Moscow: Mir Publ., 1970. 720 p.).