Математика и математическое моделирование. 2019. № 1. С. 27–35.
DOI: 10.24108/mathm.0119.0000179

Математика и Математическое моделирование
Сетевое научное издание
http://mathmelpub.ru ISSN 2412-5911

УДК 511.361

О линейной независимости некоторых функций

Иванков П. Л.[1,*]

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
[*] ivankovpl@mail.ru

В данной статье с помощью метода, специально разработанного для этой цели, устанавливается линейная независимость некоторых гипергеометрических функций и их производных (в том числе и по параметру) над полем рациональных дробей. В дальнейшем этот результат можно будет использовать для изучения арифметической природы значений указанных функций. При этом предполагается использование эффективного метода с получением достаточно точного количественного результата.

Ключевые слова: гипергеометрическая функция, линейная независимость, дифференцирование по параметру

Представлена в редакцию: 25.02.2019.

Введение

Для исследования арифметической природы значений обобщенных гипергеометрических функций, т.е. функций вида

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)}, \tag{1}$$

где $a(x)$ и $b(x)$ — многочлены, обычно применяют один из двух методов: метод Зигеля или метод, основанный на эффективном построении линейной приближающей формы (в дальнейшем — эффективный метод). Оба метода применимы и при рассмотрении аналогичной задачи для функций вида

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)} \frac{d^l}{d\lambda^l} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{x+\lambda},$$

содержащих производную по параметру λ. Примеры применения метода Зигеля в этом случае см. в работах [1, 2, 3, 4, 5, 6]. В перечисленных работах предварительно доказывалась алгебраическая независимость фигурирующих там функций. Часто доказательство такой (или линейной) независимости рассматривается как самостоятельный результат.

В случае применения эффективного метода приобретает интерес изучение вопроса о линейной независимости соответствующих функций над $\mathbb{C}(z)$; примеры исследований такого рода см. в [7, 8]. Результаты работы [7] использовались затем в [9, 10, 11].

В настоящей статье с помощью метода, специально разработанного для этой цели, доказана линейная независимость над полем $\mathbb{C}(z)$ функций вида (1) в случае $a(x) \equiv 1$ и $b(x) = x^2 - \lambda^2$. При этом рассматриваются не только производные такой функции по переменной z, но и производные по параметру λ.

1. Основной результат

Пусть $\lambda \neq \pm 1, \pm 2, \ldots$ и пусть

$$F_{lj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu^{j-1} z^{\nu} \frac{d^l}{d\lambda^l} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{x^2 - \lambda^2}, \quad l = 0, 1, \quad j = 1, 2. \tag{2}$$

Теорема 1. Пусть

$$2\lambda \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Тогда функции (2) линейно независимы над полем $\mathbb{C}(z)$ вместе с функцией, тождественно равной единице.

Во всех последующих рассуждениях будем считать, что условие (3) этой теоремы выполнено.

2. Леммы

Лемма 1. При выполнении условия (3) число $\operatorname{ctg} \pi\lambda$ отлично от нуля и является алгебраическим.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся формулой Муавра

$$\cos m\varphi + i \sin m\varphi = (\cos\varphi + i \sin\varphi)^m. \tag{4}$$

Выберем целое число m так, чтобы выполнялось включение $m\lambda \in \mathbb{Z}$; вместо φ подставим в формулу Муавра $\pi\lambda$. Сравнивая вещественные части в (4) слева и справа, получаем равенство

$$\cos m\pi\lambda = \cos^m \pi\lambda - \binom{m}{2} \cos^{m-2} \pi\lambda (1 - \cos^2 \pi\lambda) + \ldots,$$

из которого следует, что $\cos \pi\lambda$ есть алгебраическое число. В силу равенства $\cos^2 \pi\lambda + \sin^2 \pi\lambda = 1$ алгебраическим будет и число $\sin \pi\lambda$. Ясно также, что при выполнении условия (3) оба числа $\cos \pi\lambda$ и $\sin \pi\lambda$ отличны от нуля. Суммируя все вышесказанное, получаем утверждение леммы.

З а м е ч а н и е 1. Заметим, что в условиях леммы 1 число $\dfrac{1}{\lambda} - \pi \operatorname{ctg} \pi\lambda$ не равно нулю, так как в противном случае алгебраическим было бы число π.

Лемма 2. При $\nu \to \infty$ выполняется равенство

$$\prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{x^2 - \lambda^2} = \frac{\Gamma(1+\lambda)\Gamma(1-\lambda)}{2\pi} \nu^{-2\nu-1} e^{2\nu} (1 + o(1)). \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Левую часть равенства (5) перепишем в виде

$$\frac{\Gamma(1+\lambda)\,\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(\nu+\lambda+1)\,\Gamma(\nu-\lambda+1)}$$

и применим формулу Стирлинга. В результате после очевидных преобразований получим равенство (5).

Лемма 3. При $\nu \to \infty$ выполняется равенство

$$\frac{d}{d\lambda} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{x^2 - \lambda^2} = \left(\frac{1}{\lambda} - \pi \operatorname{ctg} \pi\lambda\right) \frac{\Gamma(1+\lambda)\Gamma(1-\lambda)}{2\pi} \nu^{-2\nu-1} e^{2\nu} (1 + o(1)). \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с замечанием 1 $\dfrac{1}{\lambda} - \pi \operatorname{ctg} \pi\lambda \neq 0$. Далее, имеем

$$\frac{d}{d\lambda} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{x^2 - \lambda^2} = \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{x^2 - \lambda^2} \sum_{x=1}^{\nu} \frac{2\lambda}{x^2 - \lambda^2}. \tag{7}$$

Запишем разложение котангенса на простейшие дроби:

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2} \tag{8}$$

(см., например, [12, с. 440, формула (4.2:2)]). Подставим $z = \pi\lambda$ в (8) и преобразуем получившееся равенство. В результате с учетом леммы 2 придем к равенству (6).

Лемма 4. Пусть $\lambda \in \mathbb{Q}$ и для всех z выполняется равенство

$$P_0(z) + \sum_{l=0}^{1} \sum_{j=1}^{2} P_{lj}(z)\, F_{lj}(z) = 0, \tag{9}$$

где $P_0(z)$ и $P_{lj}(z)$ — многочлены. Тогда в качестве коэффициентов этих многочленов можно взять целые числа.

Лемма может быть доказана так же, как и лемма 2 в [13, с. 91].

3. Доказательство теоремы

Пусть утверждение теоремы не выполняется. Тогда при некотором натуральном n найдутся многочлены

$$P_{lj}(z) = \sum_{s=0}^{n} p_{ljs} z^s, \quad l = 0, 1, \quad j = 1, 2, \tag{10}$$

хотя бы один из которых отличен от тождественного нуля, а также многочлен $P_0(z)$, такие, что при всех z выполняется равенство (9). Согласно лемме 4 все коэффициенты этих многочленов можно считать целыми. Разложим левую часть (9) по степеням z. Коэффициент при z^ν в этом разложении обозначим через C_ν. Из сказанного следует, что существует такое ν_0, что $C_\nu = 0$ при $\nu \geqslant \nu_0$.

Если ν больше степени многочлена $P_0(z)$ и не меньше n, то

$$C_\nu = \sum_{l=0}^{1}\sum_{j=1}^{2}\sum_{s=0}^{n} p_{ljs}(\nu-s)^{j-1}\frac{d^l}{d\lambda^l}\prod_{x=1}^{\nu-s}\frac{1}{x^2-\lambda^2} =$$
$$= Q_0(\nu)\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{x^2-\lambda^2} + Q_1(\nu)\frac{d}{d\lambda}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{x^2-\nu^2}, \quad (11)$$

где

$$Q_0(\nu)=\sum_{j=1}^{2}\sum_{s=0}^{n}\Big(p_{0js}(\nu-s)^{j-1}\prod_{x=0}^{s-1}\Big((\nu-x)^2-\lambda^2\Big)+p_{1js}(\nu-s)^{j-1}\frac{\partial}{\partial\lambda}\prod_{x=0}^{s-1}((\nu-x)^2-\lambda^2)\Big), \quad (12)$$

$$Q_1(\nu) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{s=0}^{n} p_{1js}(\nu-s)^{j-1}\prod_{x=0}^{s-1}((\nu-x)^2-\lambda^2). \quad (13)$$

Мы можем считать, что среди многочленов $P_{1j}(z)$, $j = 1, 2$, имеется отличный от тождественного нуля, так как иначе линейно зависимыми (вместе с функцией, тождественно равной единице) были бы функции $F_{0j}(z)$, $j = 1, 2$, чего на самом деле нет (см. условие линейной независимости гипергеометрических функций в случае отсутствия дифференцирования по параметру в [14, 15]). Заметим еще, что степени всех многочленов

$$p_{1js}(\nu-s)^{j-1}\prod_{x=0}^{s-1}((\nu-x)^2-\lambda^2), \quad j = 1, 2, \quad s = 0, 1, \ldots, n,$$

от ν различны. Следовательно, из того, что среди многочленов $P_{1j}(z)$, $j = 1, 2$, имеется отличный от тождественного нуля, а также из (12), (13) вытекает, что $Q_1(\nu) \not\equiv 0$. Поскольку $C_\nu = 0$ при $\nu \geqslant \nu_0$, то с учетом всего сказанного мы получаем из равенства (11), что при $\nu \geqslant \nu_0$

$$\frac{Q_0(\nu)}{Q_1(\nu)} = -\frac{\dfrac{d}{d\lambda}\displaystyle\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{x^2-\lambda^2}}{\displaystyle\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{x^2-\lambda^2}}. \quad (14)$$

Из лемм 2 и 3 вытекает, что предел правой части при $\nu \to \infty$ равен

$$\frac{1}{\lambda} - \pi\operatorname{ctg}\pi\lambda, \quad (15)$$

т.е. равенство (14) возможно лишь в случае равенства старших степеней многочленов в числителе и знаменателе левой части. Но и в этом случае возникает противоречие: предел левой части будет равен отношению коэффициентов при старших степенях многочленов $Q_0(\nu)$ и $Q_1(\nu)$ с рациональными коэффициентами, т.е. рациональному числу, а число (15) трансцендентно в силу леммы 1. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы .

Заключение

Доказанная теорема может быть использована для получения арифметического результата о значениях функций (2) в отличной от нуля рациональной точке, причем интерес представляет количественный результат, полученный эффективным методом.

Литература

1. Белогривов И.И. О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых E-функций // Вестник МГУ. Сер. 1: Математика, механика. 1967. № 2. С. 55–62.
2. Белогривов И.И. О трансцендентности и алгебраической независимости значений E-функций одного класса // Сибирский матем. журнал. 1973. Т. 14, № 1. С. 16–35.
3. Шидловский А.Б.О трансцендентности и алгебраической независимости значений целых функций некоторых классов // Математика, Т. IX. Ученые записки Моск. гос. ун-та. 1959. Вып. 186. С. 11-70.
4. Шидловский А.Б.О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых функций // Тр. Моск. матем. общества. 1959. Т. 8. С. 283–320.
5. Mahler K. Applications of a theorem by A.B. Shidlovski // Proc. of the Royal Soc. of London. Ser. A: Mathematical and Physical Sciences. 1968. Vol. 305, no. 1481. Pp. 149–173. DOI: 10.1098/rspa.1968.0111
6. Väänänen K. On the algebraic independence of the values of some E-functions // Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Ser. A. Mathematica. 1975. Vol. 1. Pp. 93–109.
7. Иванков П.Л. О линейной независимости некоторых функций // Чебышевский сб. 2010. Т. 11, вып. 1. С. 145–151.
8. Иванков П.Л. О линейной независимости некоторых функций над полем рациональных дробей // Математика и математическое моделирование. 2015. № 4. С. 1–12. DOI: 10.7463/mathm.0415.0817328
9. Иванков П.Л. О дифференцировании по параметру некоторых функций // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 5. С. 141–156. DOI: 10.7463/0512.0398478
10. Иванков П.Л. Об использовании совместных приближений для изучения арифметической природы значений гипергеометрических функций // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 12. С. 135–142. DOI: 10.7463/1212.0500464

11. Иванков П.Л. Уточнение некоторых оценок для значений гипергеометрических функций // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 4. С 175–186. DOI: 10.7463/0414.0704694

12. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций: в 2 т. 2-е изд. Т. 1: Начала теории. М.: Наука. 1967. 486 с.

13. Шидловский А.Б. Трансцендентные числа. М.: Наука. 1987. 447 с.

14. Galochkin A.I. On effective bounds for certain linear forms // New advances in transcendence theory / Ed. by A. Baker. Camb.: Camb. Univ. Press, 1988. Pp. 207–215. DOI: 10.1017/CBO9780511897184.013

15. Galochkin A.I. Linear independence and transcendence of values of hypergeometric functions // Moscow J. of Combinatorics and Number Theory. 2011. Vol. 1, iss. 2. Pp. 27–32.

Mathematics and Mathematical Modeling, 2019, no. 1, pp. 27–35.
DOI: **10.24108/mathm.0119.0000179**

Mathematics & Mathematical Modelling
Electronic journal
http://mathmelpub.ru ISSN 2412-5911

On Linear Independence of Some Functions

P. L. Ivankov[1,*]

[1]Bauman Moscow State Technical University, Russia
[*]ivankovpl@mail.ru

Keywords: hypergeometric function, linear independence, differentiation with respect to parameter

Received: 25.02.2019.

To study an arithmetic nature of the values of hyper-geometric functions (and their derivatives including those with respect to parameter), it is common practice to use one either Siegel's method or the method based on the effective construction of the linear approximating form. The main distinction between these methods consists in the mode of construction of the first approximating form. Applying Siegel's method allows us to construct such a form by means of a pigeonhole principle that makes it possible to establish, in certain cases, the algebraic independence of the values of corresponding functions. The Siegel's method can be usually applied just while considering hyper-geometric functions with rational parameters. The effective method has a certain advantage here, for in some cases this method enables us to carry out corresponding investigation also for the functions with irrational parameters. Another advantage of the effective method is that it provides obtaining of high- accuracy quantitative results. By quantitative results one usually implies the estimates of the moduli of the linear forms in the values of corresponding functions. The effective method has made it possible to obtain, in some cases, estimates being precise regarding the height of such forms with calculation of the corresponding constants. A drawback of the effective method is the narrow domain of its applications. The effective construction of the linear approximating form, which initiates reasoning, is always a challenge. So far, an effective construction of the approximating form for the product of powers of hyper-geometric functions (with the rare exceptions) failed.

In both aforementioned methods one proves previously linear independence (in Siegel's method, as a rule, algebraic independence,) of the functions under consideration. Such a proof is often considered as an independent result.

In this paper, by means of the method especially elaborated for this purpose we establish linear independence of some hyper-geometric functions and their derivatives (including those with respect to parameter) over the field of rational fractions. Subsequently, it will be possible to apply this result to investigate arithmetic properties of the values of such functions. Herewith we mean the application of the effective method to achieve the sufficiently accurate quantitative result.

References

1. Belogrivov I.I. Transcendentality and algebraic independence of values of certain E-functions. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1: Matematika, mekhanika* [Moscow Univ. Mathematics Bull.], 1967, vol. 22, no. 2, pp. 55–62 (in Russian).
2. Belogrivov I.I. The transcendence and algebraic independence of the values of a certain class of E-functions. *Sibirskij matematicheskij zhurnal* [Siberian Mathematical J.], 1973, vol. 14, no. 1, pp. 16–35 (in Russian).
3. Shidlovskij A.B.Transcendence and algebraic independence of the values of entire functions of certain classes. *Uchenye zapiski Moskovskogo gos. univ.* [Scientific notes of the Moscow State Univ.], 1959, vol. 186, pp. 11–70 (in Russian).
4. Shidlovskij A.B. Transcendentality and algebraic independence of the values of certain functions. *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshchestva* [Proc. of the Moscow Mathematical Soc.], 1959, vol. 8, pp. 283–320 (in Russian).
5. Mahler K. Applications of a theorem by A.B. Shidlovski. *Proc. of the Royal Soc. of London. Ser. A: Mathematical and Physical Sciences*, 1968, vol. 305, no. 1481, pp. 149–173. DOI: 10.1098/rspa.1968.0111
6. Väänänen K. On the algebraic independence of the values of some E-functions. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Ser. A. Mathematica*, 1975, vol. 1, pp. 93–109.
7. Ivankov P.L. On the linear independence of some functions. *Chebyshevskij sbornik* [Chebyshev's collection], 2010, no. 1(33), pp. 145–151 (in Russian).
8. Ivankov P.L. On the linear independence of some functions over the field of rational fractions. *Matematika i matematicheskoe modelirovanie* [Mathematics & Mathematical Modelling], 2015, no. 4, pp. 1–12. DOI: 10.7463/mathm.0415.0817328 (in Russian)
9. Ivankov P.L. Differentiation with respect to parameter of some functions. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2012, no. 5, pp. 141–156. DOI: 10.7463/0512.0398478 (in Russian)
10. Ivankov P.L. On the application of simultaneous approximation for the investigation of arithmetic properties of the values of hypergeometric functions. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2012, no. 12, pp. 135–142. DOI: 10.7463/1212.0500464 (in Russian)
11. Ivankov P.L. Refinement of some estimates for values of the hypergeometric functions. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2014, no. 4, pp. 175–186. DOI: 10.7463/0414.0704694 (in Russian)

12. Markushevich A.I. *Teoriia analiticheskikh funktsij* [Theory of analytic functions]: in 2 vol. 2nd ed. Vol. 1: Nachala teorii [The beginnings of the theory]. Moscow: Nauka Publ., 1967. 486 p. (in Russian).

13. Shidlovskij A.B. *Transtsendentnye chisla* [Transcendental numbers]. Moscow: Nauka Publ., 1987. 447 p. (in Russian).

14. Galochkin A.I. On effective bounds for certain linear forms. *New advances in transcendence theory* / Ed. by A. Baker. Camb.: Camb. Univ. Press, 1988. Pp. 207–215. DOI: 10.1017/CBO9780511897184.013

15. Galochkin A.I. Linear independence and transcendence of values of hypergeometric functions. *Moscow J. of Combinatorics and Number Theory*, 2011, vol. 1, iss. 2, pp. 27–32.