

УДК 519.715

## Качественный анализ системы лоренцевского типа

Абрамченко А. А.<sup>1</sup>, Канатников А. Н.<sup>1,\*</sup>

\* [mathmod@bmstu.ru](mailto:mathmod@bmstu.ru)

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

---

Проводится анализ непрерывной динамической системы лоренцевского типа. Найдены положения равновесия системы. Проведен детальный анализ нулевого положения равновесия: получена полная классификация типов этого положения равновесия в зависимости от параметров системы, также проанализированы вырожденные случаи. Для двух других положений равновесия определены возможные топологические типы с помощью численных расчетов. С помощью теоремы Гурвица были получены условия на параметры при которых положения равновесия являются асимптотически устойчивыми. Так же для других положений равновесия был рассмотрен случай, когда характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней. В таком случае возникает бифуркация Андронова — Хопфа.

**Ключевые слова:** устойчивость; динамическая система; качественный анализ; бифуркация; положение равновесия

---

### Введение

В современном естествознании важную роль играет понятие динамической системы, представляющей собой распространенный тип математических моделей [1]. Динамические системы редко сводятся к простым функциональным зависимостям. Поэтому важную роль играют методы качественного анализа динамических систем. Остановимся на простейшем типе динамических систем — непрерывных динамических системах, которые описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений.

Качественный анализ систем дифференциальных уравнений, как правило, начинается с поиска положений равновесия и исследования поведения системы в окрестности каждого положения равновесия [2, 4]. Положение равновесия динамической системы — простейший вариант установившегося режима. Поэтому качественный анализ положений равновесия, с одной стороны, является довольно простой задачей, а с другой — несет важную информацию о поведении системы. Качественный анализ положений равновесия заключается в их поиске и анализе топологического типа положения равновесия, включающего, в частности, характер устойчивости положения равновесия.

Основное внимание уделяется вопросам устойчивости положений равновесия, а также вопросам их классификации по типу поведения. Мощные инструменты качественного анализа систем дифференциальных уравнений предоставляет теория бифуркаций [2, 4, 7], в которой исследуются качественные изменения поведения системы при изменении ее параметров.

В поведении динамических систем, помимо положений равновесия, играют важную роль другие ограниченные траектории (например, предельные циклы или сепаратрисы) [3, 5, 8], а также определенные их конгломераты (например, аттракторы, инвариантные торы). Исследование ограниченных траекторий и, в частности, аттракторов — трудная задача, изучению которой посвящено масса публикаций.

В данной работе исследуется непрерывная система лоренцевского типа

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - x), \\ \dot{y} = \gamma x - xz, \\ \dot{z} = -\beta z + xy + \varepsilon x^2, \end{cases} \quad (1)$$

имеющая сложное поведение [7]. Для этой системы определены все положения равновесия и проведен анализ типов положений равновесия в зависимости от параметров системы. Проведен анализ некоторых бифуркаций положений равновесия. В частности, выявлена бифуркация Андронова — Хопфа и показано, как эта бифуркация приводит к рождению предельных циклов.

Статья организована следующим образом. В разд. 1 приведены общие методы анализа положений равновесия. В разд. 2 анализируется нулевое положение равновесия. В разд. 3 обсуждаются другие положения равновесия. В заключении подводятся итоги выполненной работы.

## 1. Анализ положений равновесия

Наиболее распространенный метод анализа положения равновесия состоит в использовании линейного приближения этой системы в окрестности положения равновесия [4]. Тип линейной системы с постоянной матрицей определяется корнями характеристического уравнения ее матрицы, а точнее их расположением по отношению к мнимой оси. Можно выделить случаи, когда все характеристические корни расположены слева или справа от мнимой оси (устойчивый или неустойчивый узел), когда корни расположены по обе стороны мнимой оси (седло и его разновидности) и когда корни расположены слева (или справа) от мнимой оси, но есть корни и на мнимой оси (вырожденный случай).

Нулевое положение равновесия линейной системы асимптотически устойчиво, если все характеристические корни находятся слева от мнимой оси. Если характеристические корни находятся слева от мнимой оси или на мнимой оси, причем все мнимые корни простые, то нулевое положение равновесия устойчиво, но не асимптотически.

Для анализа положения характеристических корней используют следующий *критерий Рауса — Гурвица*.

Рассмотрим многочлен

$$P_n(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n, \quad (2)$$

где  $a_0 > 0$ . Составим *матрицу Гурвица*

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_n \end{pmatrix}.$$

В этой матрице главная диагональ матрицы содержит коэффициенты многочлена  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , остальные элементы определяются согласно формуле

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{2i-j}, & 0 \leq 2i - j \leq n; \\ 0, & 2i - j < 0 \text{ или } 2i - j > n. \end{cases}$$

**Теорема 1 (критерий Рауса — Гурвица).** Для того чтобы все корни многочлена (2) имели отрицательные действительные части, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры матрицы  $B$  были положительны.

Поясним критерий на примере многочлена третьей степени  $P_3(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$ . Для этого многочлена матрица Гурвица имеет следующий вид:

$$B_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, критерием того, что все корни многочлена 3-й степени имеют отрицательные действительные части, является выполнение неравенств

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_1a_2 - a_0a_3 > 0, \quad (a_1a_2 - a_0a_3)a_3 > 0,$$

или

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1a_2 - a_0a_3 > 0. \quad (3)$$

Рассмотрим нелинейную автономную систему

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4)$$

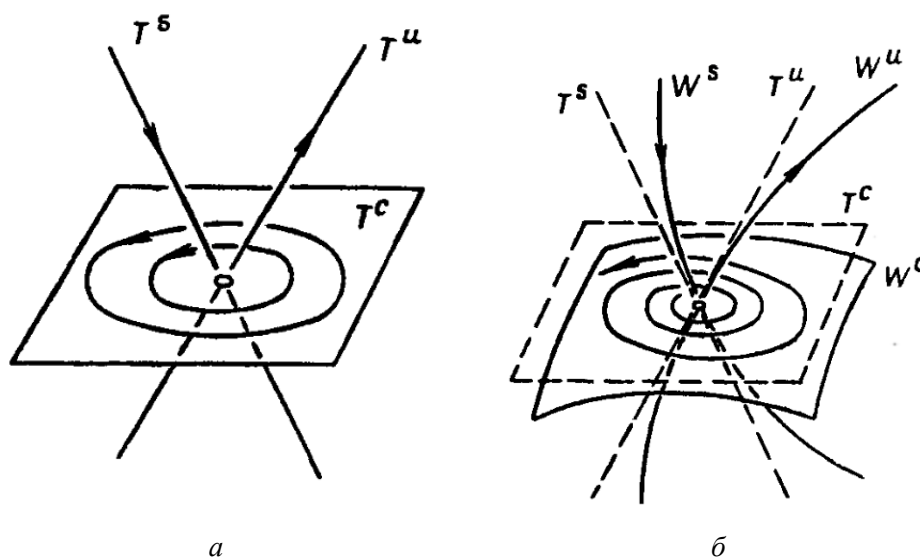
и пусть  $x_0$  — ее положение равновесия. Система

$$\dot{\xi} = f'(x_0)\xi,$$

где  $f'(x_0)$  — матрица Якоби отображения  $f$  в точке  $\xi$ , называется *системой линейного приближения* системы (4) в точке  $x_0$ . Положение равновесия  $x_0$  называется критическим, если характеристическое уравнение матрицы  $f'(x_0)$  не имеет корней на мнимой оси. Согласно теореме Гробмана — Хартмана нелинейная система в окрестности гиперболического положения равновесия топологически эквивалентна своему линейному приближению. Из этой теоремы, в частности, вытекает, что для устойчивости положения равновесия достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения матрицы Якоби имели отрицательные действительные части.

Случай, когда система в положении равновесия имеет характеристические корни на мнимой оси, рассматривается как вырожденный. В этом случае поведение системы не определяется ее линейным приближением. Для линейных систем в вырожденном случае фазовое пространство можно представить в виде прямой суммы трех инвариантных подпространств: устойчивого  $T^s$ , неустойчивого  $T^u$  и центрального  $T^c$  (рис. 1, а). Это разложение определяется разделением на три группы характеристических корней: спектр ограничения оператора  $A|_{T^s}$  лежит в открытой левой полуплоскости, ограничения  $A|_{T^u}$  — в открытой правой полуплоскости и ограничения  $A|_{T^c}$  — на мнимой оси [6, 9].

Аналогичная конструкция существует и в нелинейном случае.



**Рис. 1.** Устойчивое, неустойчивое и центральное многообразия: а — линейной системы; б — нелинейной

Для нелинейной системы (4) множество  $M \subset \mathbb{R}^n$  называется инвариантным, если для любой точки  $x \in M$  максимальная траектория системы, проходящая через  $x$ , содержится в  $M$ . Инвариантное множество со структурой многообразия называется инвариантным

многообразием. Подмногообразие в  $\mathbb{R}^n$  инвариантно, если векторное поле, соответствующее системе, в каждой точке подмногообразия касается его.

**Теорема 2 (о центральном многообразии [6]).** Пусть задана система (4) с отображением  $f$  класса  $C^{r+1}$  и положением равновесия  $x_0 = 0$ . Предположим, что  $\dot{x} = Ax$  — ее линейное приближение с устойчивым, неустойчивым и центральным подпространствами  $T^s, T^u, T^c$ . Тогда система (4) имеет гладкие инвариантные многообразия  $W^s, W^u, W^c$  классов  $C^{r+1}, C^{r+1}, C^r$ , проходящие через начало координат, у которых касательными пространствами в точке 0 являются  $T^s, T^u, T^c$ .

## 2. Нулевое положение равновесия системы

Положения равновесия системы (4) представляют собой решения системы уравнений  $f(x) = 0$ . Для системы (1) таким решением является  $x = y = z = 0$ . Таким образом, эта система имеет нулевое положение равновесия. Рассмотрим его подробнее.

**Гиперболический случай.** Матрица Якоби системы (1) в нуле имеет вид

$$f'(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}.$$

Следовательно, характеристический многочлен имеет вид

$$(\lambda + \beta)(\lambda^2 + \alpha\lambda - \alpha\gamma) = 0. \quad (5)$$

У этого многочлена очевидный корень  $\lambda_1 = -\beta$ . Два других корня являются решением квадратного уравнения:

$$\lambda_2 = -\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \alpha\gamma}, \quad \lambda_3 = -\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \alpha\gamma}.$$

Сначала выделим случай гиперболического положения равновесия. В этом случае можно выделить следующие варианты:

1) все три корня действительные отрицательные — устойчивый узел, это происходит при выполнении условий

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad -\frac{\alpha}{4} < \gamma < 0;$$

2) все три корня действительные положительные — неустойчивый узел, это происходит при выполнении условий

$$\alpha < 0, \quad \beta < 0, \quad 0 < \gamma < -\frac{\alpha}{4};$$

3) один корень действительный отрицательный, два комплексно сопряженных корня с отрицательными действительными частями, это происходит при

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma < -\frac{\alpha}{4};$$

при этом нулевое положение равновесия будет устойчивым фокусом, если  $\alpha < 2\beta$ , и устойчивым узлом в противном случае;

4) один корень действительный положительный, два комплексно сопряженных корня с положительными действительными частями, это происходит при

$$\alpha < 0, \quad \beta < 0, \quad \gamma > -\frac{\alpha}{4};$$

при этом нулевое положение равновесия будет неустойчивым фокусом, если  $\alpha > 2\beta$ , и неустойчивым узлом в противном случае;

5) все три корня действительные и разных знаков — седло, это происходит при выполнении условий

$$\alpha\gamma > 0, \quad \beta \neq 0 \quad \text{или} \quad \alpha > 0, \quad \beta < 0, \quad -\frac{\alpha}{4} < \gamma < 0 \quad \text{или} \quad \alpha < 0, \quad \beta > 0, \quad 0 < \gamma < -\frac{\alpha}{4};$$

6) один действительный корень и два комплексных, имеющих противоположный знак действительной части — седлофокус, это происходит при выполнении условий

$$\beta > 0, \quad \alpha < 0, \quad \gamma > -\frac{\alpha}{4} \quad \text{или} \quad \beta < 0, \quad \alpha > 0, \quad \gamma < -\frac{\alpha}{4}.$$

Области пространства параметров с различным типом гиперболического нулевого положения равновесия показаны на рис. 2. На рисунке НУ — неустойчивый узел, НФ — неустойчивый фокус, УУ — устойчивый узел, УФ — устойчивый фокус, С — седло, СФ — седло-фокус.

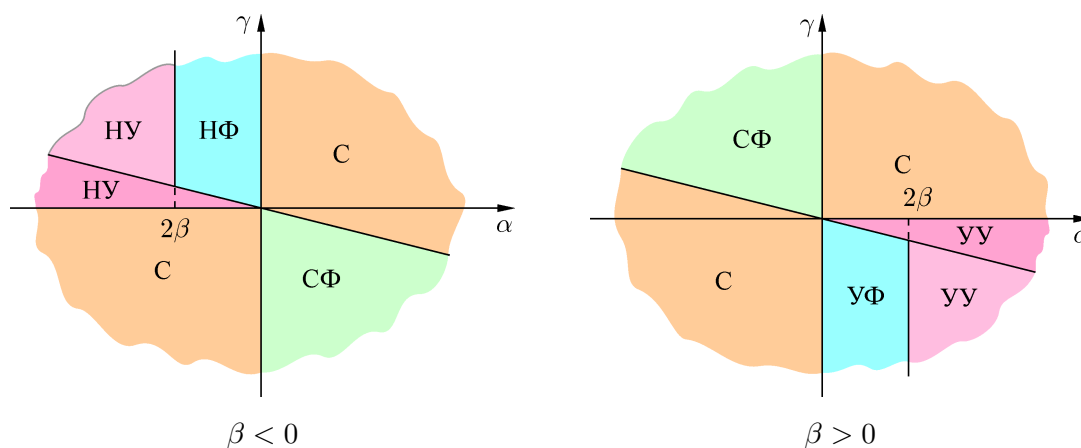


Рис. 2. Области пространства параметров с различным типов положений равновесия

**Негиперболический случай.** Нулевое положение равновесия оказывается негиперболическим, если один из коэффициентов  $\alpha, \beta, \gamma$  равен нулю. Рассмотрим эти случаи. Будем предполагать, что  $\varepsilon \geq 0$ .

Начнем со случая  $\gamma = 0$ . В этом случае уравнение (5) имеет три корня:  $\lambda_1 = -\alpha, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -\beta$ . Полагаем  $\alpha, \beta \neq 0$ . При  $\alpha\beta < 0$  система имеет одномерные устойчивое, неустойчивое и центральное многообразия. Положение равновесия неустойчиво, а поведение

системы в окрестности нуля имеет седлообразный характер. Случай  $\alpha\beta > 0$  распадается на два подслучая: первый  $\alpha, \beta > 0$ , второй  $\alpha, \beta < 0$ . второй подслучай переходит в первый изменением направления времени. Остановимся на первом подслучае.

Нулевому корню  $\lambda_2$  соответствует собственный вектор  $(1, 1, 0)^T$  матрицы Якоби, касательный к одномерному центральному многообразию. Это многообразие в окрестности нуля можно представить в параметрическом виде  $y = h_1(x), z = h_2(x)$ . Инвариантность многообразия равносильно соотношениям

$$\frac{1}{\dot{x}} = \frac{h_1'(x)}{\dot{y}} = \frac{h_2'(x)}{\dot{z}},$$

или

$$h_1'(x)\dot{x} - \dot{y} = 0, \quad h_2'(x)\dot{x} - \dot{z} = 0, \quad (6)$$

где  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  представляют собой функции переменного  $x$  в силу системы и уравнений  $y = h_1(x), z = h_2(x)$ .

Согласно теореме о центральном многообразии функции  $h_1(x), h_2(x)$  бесконечно гладкие, так что в окрестности нуля их можно представить многочленом Тейлора:

$$h_1(x) = h_1(0) + h_1'(0)x + \mu_1x^2 + \mu_2x^3 + O(x^4), \quad h_2(x) = h_2(0) + h_2'(0)x + \nu_1x^2 + \nu_2x^3 + O(x^4).$$

Условия  $h_1(0) = h_2(0)$  очевидны. Так как центральное многообразие имеет в нуле касательный вектор  $(1, 1, 0)^T$ , заключаем, что  $h_1'(0) = 1, h_2'(0) = 0$ . Таким образом,

$$h_1(x) = x + \mu_1x^2 + \mu_2x^3 + O(x^4), \quad h_2(x) = \nu_1x^2 + \nu_2x^3 + O(x^4). \quad (7)$$

Подставляя представления (7) в уравнения (6), получаем

$$\begin{aligned} \alpha\mu_1x^2 + \alpha(\mu_2 + 2\mu_1^2 + \nu_1)x^3 + O(x^4) &= 0, \\ (\beta\nu_1 - 1 - \varepsilon)x^2 + (2\alpha\mu_1\nu_1 + \beta\nu_2 - \mu_1)x^3 + O(x^4) &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\mu_1 = \nu_2 = 0, \quad \mu_2 = -\nu_1 = -\frac{1 + \varepsilon}{\beta}.$$

Таким образом,

$$h_1(x) = x - \frac{1 + \varepsilon}{\beta}x^3 + O(x^4), \quad h_2(x) = \frac{1 + \varepsilon}{\beta}x^2 + O(x^4)$$

и система (1) на центральном многообразии имеет вид

$$\dot{x} = \alpha(h_1(x) - x) = -\frac{\alpha(1 + \varepsilon)}{\beta}x^3 + O(x^4).$$

Так как по предположению  $\beta > 0$ , система на центральном многообразии является асимптотически устойчивой.

**Теорема 3.** В случае  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma = 0$  негиперболическое положение равновесия  $S_0$  асимптотически устойчиво.

**Доказательство.** Утверждение вытекает из того, что в этом случае неустойчивое многообразие ненулевое, а сужение системы на центральное многообразие является асимптотически устойчивым. Теорема доказана.

В случае  $\alpha = 0$  первое уравнение системы принимает вид  $\dot{x} = 0$ , означающий, что на траекториях системы переменная  $x$  постоянна, т.е. система (1) сводится к линейной двумерной:

$$\begin{cases} \dot{y} = \gamma x_0 - x_0 z; \\ \dot{z} = -\beta z + x_0 y + \varepsilon x_0^2. \end{cases}$$

У этой системы при  $x_0 \neq 0$  смещенное гиперболическое положение равновесия  $y_* = \beta\gamma/x_0 - \varepsilon x_0, z_* = \gamma$ . Траектории системы либо стремятся к этому положению равновесия, либо уходят на бесконечность. Из этого следует, что при  $\alpha = 0$  нулевое положение равновесия системы (1) не является устойчивым.

В случае  $\beta = 0$  нулевое положение равновесия перестает быть изолированным: положениями равновесия являются все точки оси  $Oz$ . Поведение системы заметно усложняется. Для определенности ограничимся случаем  $\alpha > 0$ .

В точке  $(0, 0, z_0)$  матрица Якоби правой части системы имеет вид

$$f'(0, 0, z_0) = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ \gamma - z_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а характеристическое уравнение — вид  $\lambda^3 + \alpha\lambda^2 - \alpha(\gamma - z_0)\lambda = 0$ . Нулевой характеристический корень  $\lambda_1 = 0$  соответствует центральному многообразию  $x = y = 0$ . При  $z_0 < \gamma$  два других корня имеют разные знаки, в окрестности таких точек система ведет себя так же, как в окрестности седла, т.е. по одному характеристическому направлению (точнее, вдоль устойчивого многообразия) система стремится к оси  $Oz$ , причем предельное значение  $z$  будет зависеть от конкретной траектории. По другому характеристическому направлению траектория уходит от оси  $Oz$ . Отметим, что на неустойчивом многообразии  $xy > 0$  и  $\dot{z} > 0$ . Эта ситуация сохраняется до тех пор, пока траектория не пересечет плоскость  $z = \gamma$ .

При  $z_0 > \gamma$  в положении равновесия  $(0, 0, z_0)$  оба ненулевых характеристических корня отрицательны и такое положение равновесия является устойчивым узлом (с поправкой на неизоллированный характер этого положения равновесия), а при  $z > \gamma + \alpha/4$  устойчивым фокусом. Траектории, начинающиеся в окрестности оси  $Oz$  в полуплоскости  $z > \gamma$ , стремятся к этой оси. Опять-таки, предельное значение  $z$  зависит от конкретной траектории.

Вспоминая анализ положений равновесия при  $z_0 < \gamma$ , заключаем, что неустойчивые многообразия этих положений при  $t \rightarrow +\infty$  заканчиваются на оси  $Oz$  в полуплоскости  $z > \gamma$ , т.е. являются сепаратрисами, соединяющими два положения равновесия. На рис. 3



представлены две сепаратрисы системы. Видно, как они отходят от оси  $Oz$ , достигают плоскости  $z = \gamma$  и возвращаются обратно к оси  $Oz$ .

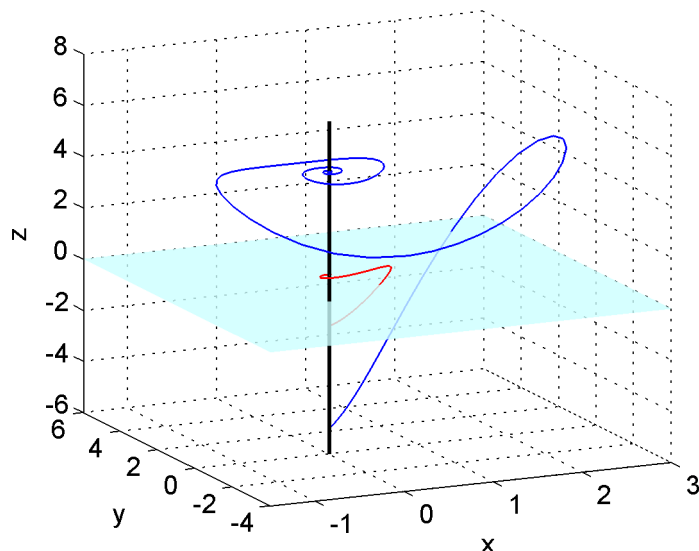


Рис. 3. Две сепаратрисы системы

### 3. Другие положения равновесия системы

Положения равновесия системы (1) находятся как решения системы уравнений

$$\begin{cases} \alpha(y - x) = 0, \\ \gamma x - xz = 0, \\ -\beta z + xy + \varepsilon x^2 = 0. \end{cases}$$

При  $\beta\gamma > 0$  система, кроме очевидного нулевого, имеет еще два решения:

$$S_1 = \left( -\sqrt{\frac{\beta\gamma}{1+\varepsilon}}, -\sqrt{\frac{\beta\gamma}{1+\varepsilon}}, \gamma \right), \quad S_2 = \left( \sqrt{\frac{\beta\gamma}{1+\varepsilon}}, \sqrt{\frac{\beta\gamma}{1+\varepsilon}}, \gamma \right).$$

Матрица Якоби системы (1) в точках  $S_2, S_3$  имеет вид

$$A_j = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -x_j \\ (1+2\varepsilon)x_j & x_j & -\beta \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2,$$

где  $x_1 = -\sqrt{\frac{\beta\gamma}{1+\varepsilon}}, x_2 = \sqrt{\frac{\beta\gamma}{1+\varepsilon}}$ .

Анализ этих положений равновесия в зависимости от параметров системы — заметно более сложная задача по сравнению с анализом нулевого положения равновесия, поскольку аналитические выражения для характеристических корней матрицы Якоби, оказываются громоздкими. Однако определенный анализ можно провести, опираясь лишь на коэффициенты характеристического уравнения, аналитическое представление которых заметно проще.

Исследование положения равновесия  $S_1$  может быть сведено к исследованию второго положения равновесия  $S_2$ , поскольку при замене  $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$  система переходит в себя, а положения равновесия меняются местами. Поэтому ограничимся анализом положения равновесия  $S_2$ . Кроме того, будем предполагать, что параметры  $\alpha, \beta, \gamma$  не обращаются в нуль.

**Теорема 4.** Положение равновесия  $S_2$  системы (1) устойчиво, если выполнены неравенства

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0, \quad \beta > \beta_* = \frac{\alpha(\gamma(1+2\varepsilon) - \alpha(1+\varepsilon))}{\alpha(1+\varepsilon) + \gamma}.$$

**Доказательство.** Характеристическое уравнение матрицы Якоби в точке  $S_2$  имеет вид

$$\lambda^3 + (\alpha + \beta)\lambda^2 + (\alpha\beta + x_2^2)\lambda + 2\alpha\beta\gamma = 0. \quad (8)$$

Достаточным условием устойчивости положения равновесия  $S_2$ , согласно критерию Рауса — Гурвица, является выполнение в этой точке неравенств (3):

$$\alpha + \beta > 0, \quad \alpha\beta + x_2^2 > 0, \quad \alpha\beta\gamma > 0, \quad (\alpha + \beta)(\alpha\beta + x_2^2) > 2\alpha\beta\gamma. \quad (9)$$

К этим неравенствам следует добавить неравенство  $\beta\gamma > 0$ , обеспечивающее существование положений равновесия  $S_2$  и  $S_3$ . Тогда с учетом выражения для  $x_2$  получим эквивалентную систему неравенств:

$$\alpha > 0, \quad \beta\gamma > 0, \quad \alpha + \beta > \frac{2\alpha\gamma}{\alpha + \frac{\gamma}{1+\varepsilon}} = \frac{2\alpha\gamma(1+\varepsilon)}{\alpha(1+\varepsilon) + \gamma}.$$

Последнее неравенство преобразуется к виду

$$\beta > \frac{2\alpha\gamma(1+\varepsilon)}{\alpha(1+\varepsilon) + \gamma} - \alpha = \frac{\alpha(\gamma(1+2\varepsilon) - \alpha(1+\varepsilon))}{\gamma + (1+\varepsilon)\alpha} = \beta_*.$$

Рассмотрим случай  $\beta > 0$ . Тогда система неравенств (9), гарантирующих устойчивость  $S_2$ , эквивалентна условиям теоремы, так что в этом случае утверждение теоремы доказано.

Пусть  $\beta < 0$ . Тогда в соответствии с неравенством  $\beta\gamma > 0$  имеем  $\gamma < 0$ . Если  $\alpha > 0$ , то

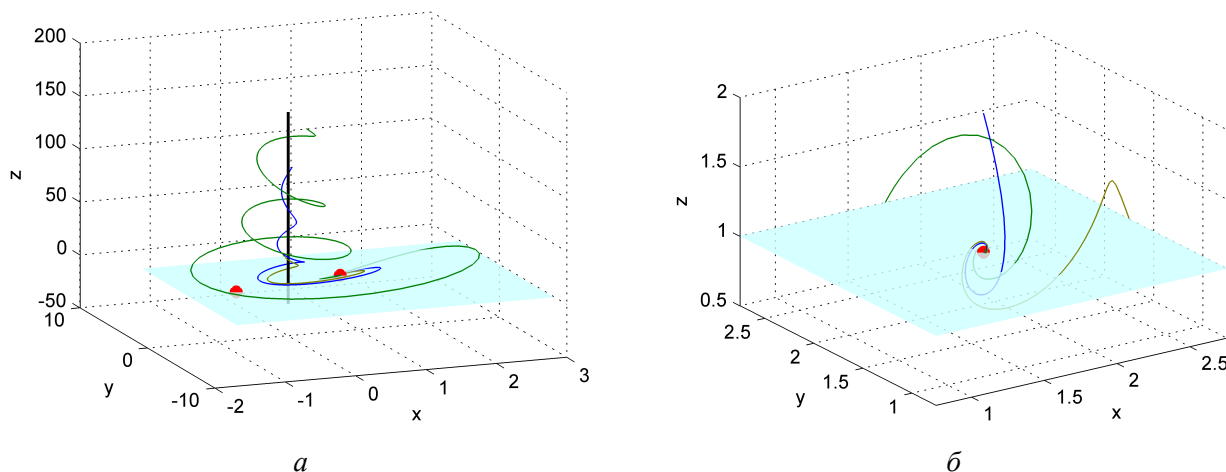
$$\beta_* = \frac{\alpha(\gamma(1+2\varepsilon) - \alpha(1+\varepsilon))}{\gamma + (1+\varepsilon)\alpha} > 0.$$

Но тогда условие  $\beta > \beta_*$  не может быть верным. Таким образом, при  $\beta < 0$  условия (9) не выполняются. Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е .** Положительность коэффициентов характеристического многочлена — необходимое условие отсутствия у него корней с неотрицательной действительной частью. Более того, если у характеристического многочлена есть отрицательные коэффициенты,

то у этого многочлена есть положительный действительный корень или пара комплексно-сопряженных корней с положительной действительной частью. Из этого следует, что если  $\alpha < 0, \beta < 0$  или  $(1 + \varepsilon)\alpha/\gamma < -1$ , то положение равновесия  $S_2$  системы (1) неустойчиво.

Поведение траекторий системы (1) в окрестности точки  $S_2$  показана на рис. 4. На рис. 4, а представлен вариант системы с неустойчивым положением равновесия  $S_2$  (траектории системы, начинающиеся в малой окрестности  $S_2$  покидают эту окрестность и уходят в бесконечность, накручиваясь на ось  $Oz$ ). На рис. 4, б представлен вариант системы с устойчивым положением равновесия  $S_2$ .



**Рис. 4.** Поведение траекторий системы в окрестности положения  $S_2$ : а — при  $\alpha = 1, \beta = \gamma = -1, \varepsilon = 0.5$ ; б — при  $\alpha = 1, \beta = 4, \gamma = 1, \varepsilon = 0.3$

В положении равновесия  $S_2$  (а также и  $S_1$ ) может наблюдаться бифуркация Андронова — Хопфа, при которой в процессе изменения параметров системы пара комплексно сопряженных характеристических корней пересекает мнимую ось. Условием существования мнимых корней у кубического уравнения  $P_3(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$  является выполнение условий  $a_0a_2 > 0, a_1a_2 - a_0a_3 = 0$ , причем характеристические корни переходят из левой полуплоскости в правую, если левая часть равенства меняет знак с плюса на минус. Для системы (1) указанные условия имеют вид

$$\beta(\alpha(1 + \varepsilon) + \gamma) > 0, \quad \beta = \beta_*,$$

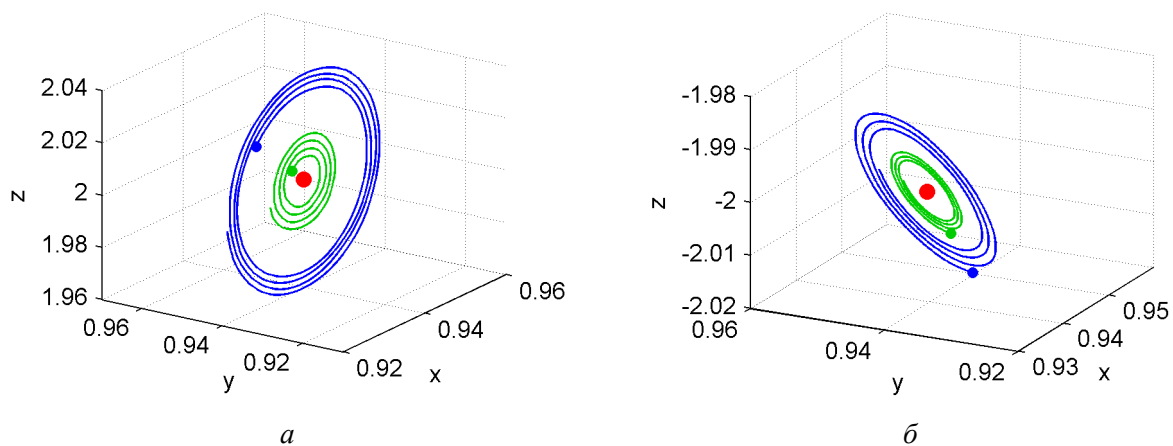
а бифуркация Андронова — Хопфа происходит при смене неравенства  $\beta > \beta_*$  неравенством  $\beta < \beta_*$ .

Поведение системы в момент бифуркации Андронова — Хопфа зависит от знака третьего характеристического корня. Рассмотрим два случая. Если  $\alpha > 0$ , то из выражения для  $\beta_*$  заключаем, что  $\gamma(1 + 2\varepsilon) - \alpha(1 + \varepsilon) > 0$ , откуда  $\gamma > 0$ . Но тогда  $\beta > 0$ , поскольку  $\beta\gamma > 0$ . В результате третий корень, равный  $-(\alpha + \beta)$ , оказывается отрицательным, в положении равновесия  $S_2$  формируется одномерное устойчивое и двумерное центральное многообразие. При смене неравенства  $\beta > \beta_*$  на неравенство  $\beta < \beta_*$  положение равновесия теряет устойчивость.

Если же  $\alpha < 0$ ,  $\gamma(1+2\varepsilon) - \alpha(1+\varepsilon) < 0$ , откуда  $\gamma < 0$  и  $\beta < 0$ . В этом случае третий корень положителен, а положение равновесия при прохождении бифуркации приобретает «максимальную неустойчивость» в том смысле, что в некоторой окрестности  $S_2$  все траектории при  $t \rightarrow -\infty$  стремятся к этому положению равновесия.

Бифуркация Андронова — Хопфа интересна тем, что при этой бифуркации образуются предельные циклы. Наиболее интересен случай, когда положение равновесия при бифуркационном значении параметра, в данном случае при  $\beta = \beta_*$ , является на центральном многообразии устойчивым или неустойчивым фокусом. Если это устойчивый фокус, то при перемещении характеристических корней с мнимой оси вправо возникает устойчивый предельный цикл, окружающий положение равновесия, причем этот цикл оказывается устойчивым не только на центральном многообразии, но и во всем фазовом пространстве. Если бифуркационное положение равновесия является неустойчивым фокусом, то, наоборот, неустойчивый предельный цикл, существующий, когда характеристические корни находятся слева от мнимой оси, сливается с устойчивым фокусом, который в результате становится неустойчивым.

На рис. 5 показаны траектории системы в центральном многообразии для случаев  $\alpha > 0$  (рис. 5, а) и  $\alpha < 0$  (рис. 5, б). Видно, что при  $\alpha > 0$  точка  $S_2$  на центральном многообразии является неустойчивым узлом, в то время как при  $\alpha < 0$  эта точка оказывается устойчивым узлом. Следовательно,  $\beta > \beta_* > 0$  и при  $\beta < \beta_* < 0$  система имеет предельные циклы.



**Рис. 5.** Траектории системы на центральном многообразии при бифуркации Андронова — Хопфа: а — при  $\alpha = 1$ ,  $\gamma = 2$ ,  $\varepsilon = 0,3$ ,  $\beta = \beta_* = 0,5758$ ; б — при  $\alpha = -1$ ,  $\gamma = -2$ ,  $\varepsilon = 0,3$ ,  $\beta = \beta_* = -0,5758$

### Заключение

В статье проведен качественный анализ положений равновесия трехмерной системы лоренцевского типа, обладающей сложной динамикой. Система всегда имеет нулевое положение равновесия. Кроме того, при определенном сочетании значений параметров система может иметь два дополнительных положения равновесия.

Для данной системы проведен подробный анализ нулевого положения равновесия: проанализированы все гиперболические случаи и получена их классификация в зависимости от значений параметров. Кроме того, проанализированы вырожденные (негиперболические случаи).

Проведен также анализ двух других положений равновесия. На основе коэффициентов характеристического уравнения получены условия устойчивости этих положений равновесия, выявлена бифуркация Андронова — Хопфа, с помощью численных расчетов показано существование предельного цикла в окрестности бифуркационного параметра.

### Список литературы

1. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Подлазов А.В. Нелинейная динамика: подходы, результаты, надежды. 3-е изд. М.: Либроком, 2011. 280 с.
2. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.М., Майер А.Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967. 488 с.
3. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Инвариантные компакты динамических систем. М: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 232 с.
4. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. 486 с.
5. Крищенко А.П. Локализация инвариантных компактов динамических систем // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 12. С. 1597–1604.
6. Арнольд В.И., Ильясенко Ю.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М: Наука, 1972, 240 с.
7. Li X., Wang H. Homoclinic and heteroclinic orbits and bifurcations of a new Lorenz-type system // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2011. Vol. 21, no. 9. P. 2695–2712. DOI: [10.1142/S0218127411030039](https://doi.org/10.1142/S0218127411030039)
8. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978, 304 с.
9. Ладис Н.Н. Топологическая эквивалентность линейных потоков // Дифференциальные уравнения. 1973. Т. 9, № 7. С. 2123–2135.

## The Qualitative Analysis of a Lorenz-Type System

Abramchenko A. A.<sup>1</sup>, Kanatnikov A. N.<sup>1,\*</sup>

\*[mathmod@bmstu.ru](mailto:mathmod@bmstu.ru)

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Russia

---

**Keywords:** stability, dynamical system, qualitative analysis, bifurcation, equilibrium

---

In modern natural sciences, the term of a dynamic system plays an important role and is a common type of mathematical models. Dynamical systems are rarely come to simple functional dependencies. Therefore, qualitative analysis methods of dynamical systems are crucial. In the paper, we consider the simplest type of dynamic systems — continuous dynamical systems described by the systems of ordinary differential equations.

Qualitative analysis of differential equations systems usually starts with a search for equilibrium points and a study of the behaviour of a dynamic system in the neighborhood of each equilibrium points. The main attention is paid to the stability of equilibrium, as well as their behaviour type classification. Effective qualitative analysis of differential equations systems is best approached through the bifurcation theory which explains modification of quality in the behaviour of a dynamic system if its parameters are changed.

In the behavior of dynamic systems, in addition to the equilibrium points, other bounded trajectories (for example, boundary cycles or separatrix) and their certain conglomerates (such as attractors, invariant tori) play an important role. Investigation of bounded trajectories, in particular, attractors is a difficult task and a lot of scientific articles deal with this problem.

In this paper, we study a continuous Lorenz-type system. For this system, all of the equilibrium points are defined and the analysis of equilibrium points types are performed in accordance with the system parameters. The analysis of some bifurcations of equilibrium points are carried out. In particular, the Andronov — Hopf bifurcation is determined and it is shown that it leads to a bifurcation of boundary cycles.

### References

1. Malinetskij G.G., Potapov A.B., Podlazov A.V. *Nelinejnaja dinamika: podhody, rezul'taty, nadezhdy* [Nonlinear dynamics: Approaches, results, hope]. 3<sup>rd</sup> ed. Moscow, Librokom publ., 2011, 280 p. (in Russian)

2. Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.M., Majer A.G. *Teorija bifurkatsij dinamičeskih sistem na ploskosti* [Bifurcation theory of dynamical systems on the plane]. Moscow, Nauka publ., 1967. 488 p. (in Russian)
3. Kanatnikov A.N., Krishchenko A.P. *Invariantnye kompakty dinamičeskih sistem* [Compact invariant sets of dynamical systems]. Moscow, Bauman MSTU publ., 2011, 232 p. (in Russian)
4. Bautin N.N., Leontovich E.A. *Metody i priemy kachestvennogo issledovanija dinamičeskih sistem na ploskosti* [Methods and techniques of the qualitative study of dynamical systems on the plane]. Moscow, Nauka publ., 1990, 486 p. (in Russian)
5. Krishchenko A.P. Localization of invariant compact sets of dynamical systems. *Differentsial'nye Uravneniya*, vol. 41, no. 12, 2005, pp. 1597–1604 (English version of journal: *Differential Equations*, vol. 41, no. 12, 2005, pp. 1669–1676).
6. Arnol'd V.I., Il'jashenko Ju.S. *Obyknovennye differentsial'nye uravnenija* [Ordinary Differential Equations]. Moscow, Nauka publ., 1972, 240 p. (in Russian)
7. Li X., Wang H. Homoclinic and heteroclinic orbits and bifurcations of a new Lorenz-type system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2011, vol. 21, no. 9. pp. 2695–2712. DOI: [10.1142/S0218127411030039](https://doi.org/10.1142/S0218127411030039)
8. Arnol'd V.I. *Dopolnitel'nye glavy teorii obyknovennyh differentsial'nyh uravnenij* [Additional chapters of the theory of ordinary differential equations]. Moscow, Nauka publ., 1978. 304 p. (in Russian)
9. Ladis N.N. Topological equivalence of linear streams. *Differentsial'nye Uravneniya = Differential Equations*, 1973, vol. 9, no. 7. pp. 2123–2135. (in Russian)