Математика и Математическое моделирование
Сетевое научное издание
http://mathmelpub.ru ISSN 2412-5911

Ссылка на статью:
// Математика и математическое моделирование. 2018. № 4. С. 45–61.
DOI: **10.24108/mathm.0418.0000138**
Представлена в редакцию: 21.08.2018

УДК 517.977

Представление обратимых линейных обыкновенных дифференциальных операторов в виде композиции простейших операторов

Четвериков В. Н.[1,*]

[*] chetverikov.vl@yandex.ru

[1] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Исследуются обратимые линейные дифференциальные операторы с одной независимой переменной, обратные к которым также являются дифференциальными. Как примеры таких операторов рассматриваются операторы, которые в некоторых базисах задаются верхними треугольными матрицами, отличающимися от единичных матриц только первой строкой. Операторы такого вида названы одноклеточными. Доказывается, что любой обратимый обыкновенный линейный дифференциальный оператор представляется в виде композиции одноклеточных операторов. Показано, чему равно минимальное количество одноклеточных операторов в такой композиции. Полученные результаты обобщаются на линеаризации нелинейных обратимых преобразований систем с управлением, при которых переменные одной системы выражаются не только через переменные другой системы, но и их производные.

Ключевые слова: обратимые обыкновенные линейные дифференциальные операторы; преобразование систем управления

Введение

Обратимые дифференциальные операторы возникают при решении многих математических задач (см., например, [1, §2.3], также [2, 3]). Описанию обратимых линейных обыкновенных дифференциальных операторов посвящены работы [4, 5, 6, 7]. В [4] получена классификация таких операторов, основанная на сопоставлении каждому обратимому оператору таблицы чисел и описании этих таблиц на наглядном элементарно-геометрическом языке. Таким образом, обратимому линейному обыкновенному дифференциальному оператору ставится в соответствие элементарно-геометрическая модель, которая называется d-схемой квадратов. В [5, 7] получено описание всех обратимых операторов, имеющих одну и ту же d-схему. В [5, 6] все указанные результаты обобщены на обратимые отображения фильтрованных модулей, порожденные одним дифференцированием (точное определение см. в разд. 2). Такие отображения были названы обратимыми D-операторами. Было показано, что обратимыми D-операторами являются, в частности, обратимые линейные разностные операторы с периодическими коэффициентами, линеаризации $\mathcal{C}$-преобразований (см. [2, 3]) и унимодулярные матрицы.

В данной работе вводится понятие одноклеточного D-оператора. Так названы обратимые D-операторы, d-схемы которых состоят из одного квадрата. Установлено, что любой обратимый D-оператор разлагается в композицию одноклеточных, причем минимальное количество одноклеточных D-операторов в такой композиции равно количеству квадратов d-схемы исходного D-оператора.

Статья организована следующим образом. В разд. 1 определяются обратимые линейные дифференциальные операторы с одной независимой переменной. В разд. 2 формулируется обобщение таких операторов, а в разд. 3 — их элементарно-геометрические модели. Разд. 4 посвящен описанию обратимых D-операторов, имеющих одну и ту же d-схему. Основные результаты работы приводятся в разд. 5, а их доказательство — в разд. 6, 7.

1. Линейные дифференциальные операторы

Пусть M — одномерное многообразие; $A = C^\infty(M)$ — алгебра гладких функций на M; $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ — модули гладких (бесконечно дифференцируемых) сечений двух векторных расслоений ξ, ζ над M размерности m и m_0 соответственно (о теории расслоений см. [8, гл. 2, 3]). Напомним, что если фиксировать координату t на M и координаты $p_1, \ldots,$ p_m в слоях расслоения ξ, то любое сечение этого расслоения можно представить себе как векторную функцию $p(t) = (p_1(t), \ldots, p_m(t))^T$. Аналогичное представление существует для сечений расслоения ζ, координаты в слоях которого будем обозначать через $q_1, \ldots, q_{m_0}$.

Пусть k — некоторое неотрицательное целое число. Отображение Δ из $\mathcal{P}$ в $\mathcal{Q}$, заданное в координатах соотношениями вида

$$\Delta\big(p(t)\big) = (q_1(t), \ldots, q_{m_0}(t))^T \in \mathcal{Q}, \qquad q_i(t) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=0}^{k} a_{ijl}(t) \frac{d^l p_j(t)}{dt^l}, \quad a_{ijl} \in A, \tag{1}$$

называют *линейным обыкновенным дифференциальным оператором* из $\mathcal{P}$ в $\mathcal{Q}$ порядка $\leq k$.

Через $\operatorname{ord}\Delta$ будем обозначать *порядок* дифференциального оператора Δ, т.е. $k = \operatorname{ord}\Delta$, если Δ — оператор порядка не выше k, но не является оператором порядка не выше $k-1$.

Линейный дифференциальный оператор из $\mathcal{P} = A$ в $\mathcal{Q} = A$ (т.е. в случае $m = m_0 = 1$) называют *скалярным*.

Формулой $(a^+\Delta)(p) = \Delta(ap)$, $p \in \mathcal{P}$, определим операцию умножения линейного дифференциального оператора Δ из $\mathcal{P}$ в $\mathcal{Q}$ на функцию $a \in A$. Множество всех линейных дифференциальных операторов порядка не выше k, действующих из $\mathcal{P}$ в $\mathcal{Q}$, представляет собой A-модуль относительно этого умножения. Обозначим этот модуль через $\mathrm{Diff}_k^+(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$. Из определений следует, что $\mathrm{Diff}_k^+(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \subset \mathrm{Diff}_{k+1}^+(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ при $k \geq 0$. Объединение $\mathrm{Diff}_k^+(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ для всех $k \geq 0$ представляет собой A-модуль бесконечной размерности. Обозначим его через $\mathrm{Diff}_*^+(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$.

Так как линейные дифференциальные операторы представляют собой отображения, то определена операция композиции соответствующих операторов. Дифференциальный оператор $\Delta\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ называют (*двусторонне*) *обратимым*, если существует такой дифференциальный оператор $\Delta^{-1}\colon \mathcal{Q} \to \mathcal{P}$, что композиция $\Delta^{-1} \circ \Delta$ есть тождественное отображение модуля $\mathcal{P}$, а композиция $\Delta \circ \Delta^{-1}$ — тождественное отображение модуля $\mathcal{Q}$. В этом случае оператор Δ^{-1} называют *обратным* к Δ.

В координатах элементы $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ удобно представлять в виде столбцов функций, а линейный оператор $\Delta\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ — в виде матрицы скалярных операторов. Нетрудно доказать, что обратимый линейный дифференциальный оператор задается квадратной матрицей.

Пример 1. Рассмотрим в случае трехмерных расслоений ξ, ζ операторы Δ и Δ^{-1}, заданные матрицами

$$\Delta = \begin{pmatrix} D & D^2 - t & D^3 - tD + t + 1 \\ 1 & D & D^2 \\ D^2 & D^3 - tD & D^4 - tD^2 + (t+1)D \end{pmatrix},$$

$$\Delta^{-1} = \begin{pmatrix} (t+1)D^2 & D^2 + 1 & -(t+1)D - 1 \\ tD^2 - (t+1)D + 1 & D^2 - D & -tD + t \\ -tD + 1 & -D & t \end{pmatrix},$$

где $D = \dfrac{d}{dt}$. Нетрудно убедиться в том, что данные операторы являются взаимно обратными.

2. Обобщения линейных дифференциальных операторов

Любой линейный обыкновенный дифференциальный оператор $\Delta\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ определяет гомоморфизм из модуля $\mathrm{Diff}^{+}_{*}(A, \mathcal{P})$ в модуль $\mathrm{Diff}^{+}_{*}(A, \mathcal{Q})$. А именно, оператор $\beta \in \mathrm{Diff}^{+}_{k}(A, \mathcal{P})$ отображается в оператор $\alpha = \Delta \circ \beta$ из A в $\mathcal{Q}$. Так как порядок композиции $\Delta \circ \beta$ не может быть больше суммы порядков Δ и β, то $\alpha \in \mathrm{Diff}^{+}_{k+L}(A, \mathcal{Q})$, где $L = \operatorname{ord} \Delta$. Модульная структура в $\mathrm{Diff}^{+}_{*}(A, \mathcal{P})$ и $\mathrm{Diff}^{+}_{*}(A, \mathcal{Q})$ выбрана так, что данное отображение есть гомоморфизм модулей. Если оператор Δ обратим, то указанное отображение является изоморфизмом. На основе данной конструкции понятие линейного обыкновенного дифференциального оператора можно обобщить следующим образом [5, 6].

Пусть M — гладкое (бесконечно дифференцируемое) многообразие; $A = C^\infty(M)$; $\xi_0 \subset \xi_1 \subset \ldots \subset \xi_l \subset \xi_{l+1} \subset \ldots$ — система вложенных конечномерных векторных расслоений над многообразием M; G_l — A-модуль гладких сечений векторного расслоения ξ_l для $l \geq 0$. Тогда имеем систему вложенных модулей $G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_l \subset G_{l+1} \subset \ldots$ Обозначим $G = \bigcup\limits_{l=0}^{\infty} G_l$. Кроме того, пусть существует такое отображение $D : G \longrightarrow G$, что $D(G_l) \subset G_{l+1}$ при $l \geq 0$, а соответствующие факторотображения

$$D : \frac{G_l}{G_{l-1}} \to \frac{G_{l+1}}{G_l}, \qquad l \geq 0, \tag{2}$$

где $G_{-1} = 0$, есть изоморфизмы A-модулей. Таким образом, для любого l фактормодуль G_{l+1}/G_l изоморфен $G_0/G_{-1} \simeq G_0$. При выполнении всех этих условий отображение D будем называть *порождающим оператором*, а модуль G — *фильтрованным модулем*, порожденным модулем G_0 и оператором D (или, более кратко, *D-порожденным модулем*). При этом, если элемент $g \in G$ лежит в $G_l \setminus G_{l-1}$, то число l называют *фильтрацией* этого элемента.

Модуль $\mathrm{Diff}_*^+(A, \mathcal{P})$ является D-порожденным модулем с порождающим оператором D, который элемент $\beta \in \mathrm{Diff}_l^+(A, \mathcal{P})$ отображает в его композицию с производной по t: $D\beta = \beta \circ \dfrac{d}{dt}$ (доказательство см. в [4]).

Гомоморфизм Δ одного D-порожденного модуля F в другой D-порожденный модуль G назовем *D-оператором* порядка не выше l, если он коммутирует с порождающими операторами, т.е. $\Delta \circ D_F = D_G \circ \Delta$, и увеличивает фильтрацию элементов не более, чем на l, т.е. $\Delta(F_k) \subset G_{k+l}$ для любого $k \geq 0$, где D_F, D_G — порождающие операторы, а $\{F_k\}$, $\{G_l\}$ — системы вложенных подмодулей модулей F и G соответственно.

D-Оператор $\Delta\colon\ F \to G$ назовем *обратимым*, если можно указать такой D-оператор $\Delta^{-1}\colon\ G \to F$, что композиция $\Delta^{-1} \circ \Delta$ есть тождественное отображение D-порожденного модуля F, а композиция $\Delta \circ \Delta^{-1}$ — тождественное отображение D-порожденного модуля G. В этом случае D-оператор Δ^{-1} назовем *обратным* к Δ.

Любой линейный дифференциальный оператор из $\mathcal{P}$ в $\mathcal{Q}$ порядка не выше l определяет D-оператор порядка не выше l из D-порожденного модуля $\mathrm{Diff}_*^+(A, \mathcal{P})$ в D-порожденный модуль $\mathrm{Diff}_*^+(A, \mathcal{Q})$. Линейный дифференциальный оператор обратим тогда и только тогда, когда обратим соответствующий ему D-оператор.

Следующие два типа объектов также интерпретируются как обратимые D-операторы. Рассмотрим полиномы от одной переменной. Квадратная полиномиальная матрица, определитель которой есть ненулевая постоянная, называется *унимодулярной* [9, §60]. Модуль столбцов одного размера, состоящих из полиномов, образует D-порожденный модуль, если в качестве порождающего оператора взять умножение столбцов на полиномиальную переменную. Умножение унимодулярной матрицы на столбец есть обратимый D-оператор.

Обратимые $\mathcal{C}$-дифференциальные операторы на бесконечном продолжении системы с управлением (подробности см. в [3]) также определяют обратимые D-операторы. Соответствующий D-порожденный модуль есть модуль картановских форм, а порождающий оператор совпадает с полной производной по t на бесконечном продолжении системы с управлением. В этом случае M есть бесконечное продолжение системы с управлением, а значит, является бесконечномерным многообразием (см. [2, гл. 6], [3]). Отметим, что результаты данной статьи применимы и к этому бесконечномерному случаю.

Из определения D-порожденного модуля $F = \cup_{k=0}^{\infty} F_k$ следует, что если $f_1, \ldots, f_m$ — базис модуля F_0, то $D^j f_i$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{0, k}$, — базис модуля F_k. Из определения же D-оператора $\Delta\colon\ F \to G$ следует, что

$$\Delta\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{k} b_{ij} D^j f_i\Big) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{k} b_{ij} D^j \Delta(f_i), \quad b_{ij} \in A.$$

Поэтому любой D-оператор Δ определяется набором элементов $\Delta(f_i)$, $i = \overline{1,\, m}$. Если $L = \operatorname{ord}\Delta$, то указанные элементы лежат в G_L. А если $e_1, \ldots, e_{m_0}$ — базис модуля G_0, то

$$\Delta(f_i) = \sum_{j=1}^{m_0}\sum_{k=0}^{L} a_{ijk}D^k e_j, \quad i = \overline{1,\, m}, \quad a_{ijk} \in A.$$

Выражение вида $\sum\limits_{k=0}^{L} a_k D^k$, $a_k \in A$, $a_L \neq 0$, определяет D-оператор из G в G, который увеличивает фильтрацию элементов G ровно на L. Такой оператор будем называть *скалярным D-оператором* порядка L. Так как любой D-оператор является гомоморфизмом модулей и коммутирует с порождающими операторами, то он коммутирует и с любым скалярным D-оператором.

Таким образом, любой D-оператор Δ определяется матрицей скалярных D-операторов

$$\Delta_{ij} = \sum_{k=0}^{L} a_{ijk}D^k, \quad i = \overline{1,\, m}, \quad j = \overline{1,\, m_0}.$$

3. Схемы квадратов

Пусть Δ — обратимый D-оператор из D-порожденного модуля $F = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} F_k$ в D-порожденный модуль $G = \bigcup\limits_{l=0}^{\infty} G_l$. Для различных $k,\, l \geq 0$ рассмотрим пересечения $\Delta(F_k) \cap G_l$. Модули G_l, $\Delta(F_k)$ являются модулями гладких сечений векторных расслоений над M. Обозначим соответствующие расслоения через ξ_l и ζ_k. По определению слои этих расслоений над точкой $t \in M$ имеют постоянную размерность, не зависящую от t. Пересечение модулей $\Delta(F_k) \cap G_l$ является модулем гладких сечений пересечения векторных расслоений ξ_l и ζ_k. Слои пересечения векторных расслоений могут иметь разную размерность, зависящую от точки $t \in M$. Такой объект называют *векторным расслоением с особенностями*. Под *размерностью модуля R* гладких сечений векторного расслоения с особенностями над многообразием M мы понимаем целочисленную функцию, которая точке $t \in M$ ставит в соответствие размерность слоя этого расслоения над t. Обозначим эту функцию через $\dim R$.

Пусть $L = \operatorname{ord}\Delta$, а $K = \operatorname{ord}\Delta^{-1}$. Точку $t \in M$ будем называть *d-регулярной точкой* обратимого D-оператора Δ, если в некоторой окрестности этой точки пересечение слоев ξ_l и ζ_k имеет постоянную размерность для любых $l = \overline{0,\, L}$ и $k = \overline{0,\, K}$. Таким образом, в окрестности d-регулярной точки для указанных k и l функции $\dim(\Delta(F_k) \cap G_l)$ постоянны. Далее будем рассматривать обратимые D-операторы только в окрестности d-регулярных точек.

Каждый D-оператор Δ порождает последовательность целых неотрицательных чисел $d_{k,l} = \dim(\Delta(F_k) \cap G_l)$ для $l,\, k \geq 0$. Эта последовательность однозначно определяет последовательность чисел

$$\rho_{k,l} = \varkappa_{k,l} - \varkappa_{k-1,l-1}, \quad k,\, l \geq 0, \tag{3}$$

где $\varkappa_{k,l} = d_{k,l} - d_{k-1,l} - d_{k,l-1} + d_{k-1,l-1}$ (полагаем, что $d_{k,l} = \varkappa_{k,l} = 0$, если $k < 0$ или $l < 0$).

Нетрудно доказать, что последовательность $\{d_{k,l}\}$ восстанавливается однозначно по последовательности $\{\rho_{k,l}\}$. При этом последовательность $\{d_{k,l}\}$ — возрастающая, а последовательность $\{\rho_{k,l}\}$ имеет только конечное число ненулевых значений (см. далее).

Для описания последовательностей $\{\rho_{k,l}\}$, соответствующих обратимым D-операторам, введем следующие понятия [4]. Рассмотрим конечный набор квадратов, расположенных в первой четверти координатной плоскости, у которых вершины имеют целочисленные координаты, а стороны параллельны осям координат. Верхнему правому углу (т.е. дальнему от начала координат) каждого квадрата припишем значение -1, а нижнему левому углу (т.е. ближнему от начала координат) — значение 1. Отметим, что квадраты могут пересекаться и даже совпадать. Если есть точки, являющиеся вершинами нескольких квадратов, значения, назначенные по каждому квадрату, в этих точках суммируем. Остальным точкам первой четверти с целочисленными координатами припишем нулевые значения. Получим последовательность чисел $\tilde{\rho}_{k,l}$, $k \geq 0, l \geq 0$. Предположим, что существует такая последовательность целых неотрицательных чисел $a_{k,l}$, что последовательность чисел $\rho_{k,l} = \tilde{\rho}_{k,l} + a_{k,l}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho_{k,l} = 0 \ \ (l > 0); \quad \sum_{l=0}^{\infty} \rho_{k,l} = 0 \ \ (k > 0); \tag{4}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho_{k,0} = \sum_{l=0}^{\infty} \rho_{0,l} = m, \tag{5}$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} \rho_{j,l} \geq z_{k,l}, \quad \sum_{j=0}^{l-1} \rho_{k,j} \geq z_{k,l} \quad (k > 0, l > 0), \tag{6}$$

где $m \in \mathbb{N}$, $z_{k,l}$ — количество квадратов с верхним правым углом в точке $(k,\ l)$.

Указанный набор квадратов будем называть *d-схемой квадратов*, а соответствующую этому набору последовательность $\{\rho_{k,l}\}$ — *m-таблицей* d-схемы квадратов.

Отметим, что d-схема квадратов определяет последовательность $\{\rho_{k,l}\}$ неоднозначно, так как может существовать несколько вариантов выбора последовательности $\{a_{k,l}\}$, используемой для получения последовательности $\{\rho_{k,l}\}$ (примеры таких d-схем можно найти в [5, 7]).

Теорема 1 ([5, 7]). Пусть F и G — D-порожденые модули, причем $F_0 \simeq A^m \simeq G_0$. Тогда:

а) для всякого обратимого D-оператора из F в G последовательность $\{\rho_{k,l}\}$, построенная согласно формулам (3), в окрестности d-регулярной точки совпадает с m-таблицей некоторой d-схемы квадратов;

б) если d-схема квадратов имеет m-таблицу, то существует обратимый D-оператор из F в G, последовательность $\{\rho_{k,l}\}$ которого совпадает с данной m-таблицей.

Пример 2. На рис. 1 представлены две d-схемы и их таблицы чисел $\{\rho_{k,l}\}$. Данные d-схемы интересны тем, что первая состоит из одного квадрата, а вторая есть d-схема для оператора из примера 1. Последовательность $\{\rho_{k,l}\}$ этого оператора совпадает с изображенной на рис. 1 3-таблицей d-схемы. Квадраты d-схем выделены пунктирными линиями.

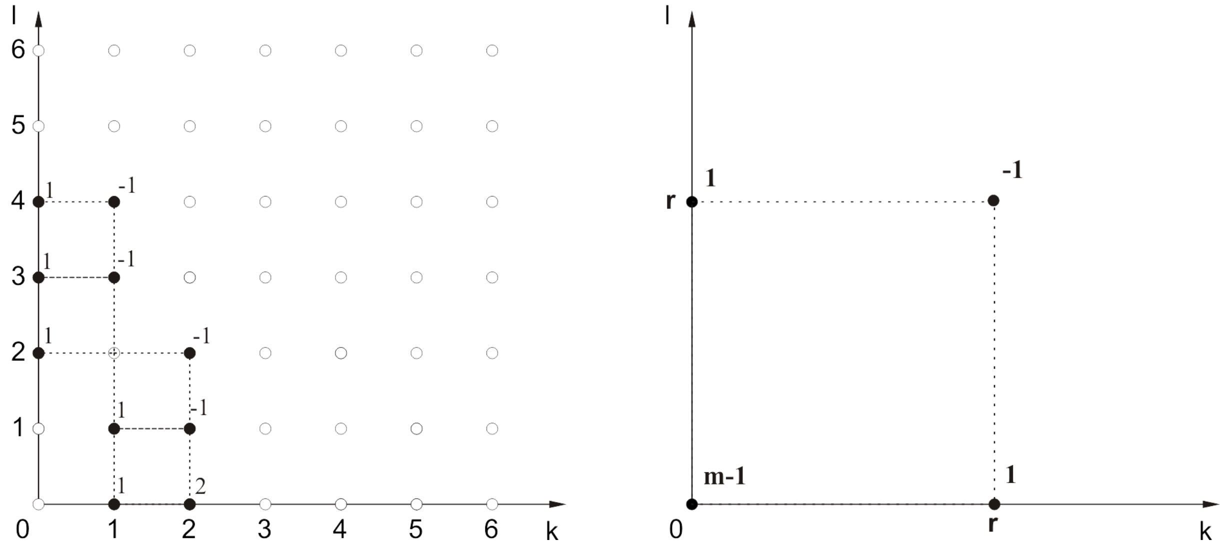

Рис. 1

Таблицы $\rho_{k,l}$ изображены графически так, что черным цветом выделены целочисленные точки $(k,\ l)$, для которых $\rho_{k,l} \neq 0$. Значение $\rho_{k,l}$ указано справа сверху от точки $(k,\ l)$. В остальных точках значения $\rho_{k,l}$ нулевые.

4. Конструирование обратимых D-операторов

Покажем, как построить обратимый D-оператор по заданной d-схеме и какие структуры для этого еще нужно задать. Пусть задана d-схема квадратов, для нее построена последовательность чисел $\tilde{\rho}_{k,l}$, найдены такие целые неотрицательные числа $a_{k,l}$, что набор $\{\rho_{k,l} = \tilde{\rho}_{k,l} + a_{k,l}\}$ удовлетворяет условиям (4)–(6). Обозначим через Z множество верхних правых углов квадратов d-схемы, а через B — множество элементов двух следующих типов. Элементы первого типа — это нижние левые углы квадратов. Для каждой пары $(k,\ l)$ существует $a_{k,l}$ элементов второго типа с координатами $(k,\ l)$. В B нет других элементов. Из равенств (4)–(5) следует, что сумма чисел $a_{k,l}$ равна m. Поэтому множество B имеет на m элементов больше, чем множество Z.

Обозначим через $Z_{k,l}$ подмножество элементов Z с координатами $(k,\ l)$, а через $B_{k,l}$ — аналогичное подмножество в B. Для элемента β множества B или Z обозначим через $c_1(\beta)$ его первую координату, а через $c_2(\beta)$ — его вторую координату. Для элементов β_1 и β_2 из множеств B и Z введем следующее отношение порядка:

$$\beta_1 \prec \beta_2 \quad \Longleftrightarrow \quad c_1(\beta_1) \leq c_1(\beta_2),\ \ c_2(\beta_1) \leq c_2(\beta_2),\ \ c_1(\beta_1) + c_2(\beta_1) < c_1(\beta_2) + c_2(\beta_2).$$

Поставим в соответствие каждой паре элементов $\xi \in Z, \beta \in B$ скалярный D-оператор $\Box_{\xi,\beta}$, удовлетворяющий следующим условиям.

1. Если $\beta \prec \xi$, то $\Box_{\xi,\beta}$ есть скалярный D-оператор порядка не больше, чем и $c_1(\xi) - c_1(\beta)$, и $c_2(\xi) - c_2(\beta)$. В остальных случаях, т.е. когда $\beta \not\prec \xi$, полагаем $\Box_{\xi,\beta} = 0$.

2. В случае, когда ξ и β соответствуют углам одного квадрата, порядок оператора $\Box_{\xi,\beta}$ равен $c_1(\xi) - c_1(\beta)$. Для остальных элементов β расположенных на одной диагонали с ξ (т.е. $c_1(\xi) - c_1(\beta) = c_2(\xi) - c_2(\beta)$) порядок оператора $\Box_{\xi,\beta}$ строго меньше $c_1(\xi) - c_1(\beta)$.

3. Для любого $k > 0$ в каждой точке рассматриваемой окрестности многообразия M невырождена квадратная матрица функций

$$(\Box_{\xi,\beta}), \quad \xi \in Z_{k,j}, \;\; j > 0, \quad \beta \in B_{k,i}, \;\; i \geq 0. \tag{7}$$

То, что эта матрица квадратная, следует из определения $Z_{k,j}$, $B_{k,i}$ и из второго равенства в (4). То, что она состоит из функций, т.е. скалярных D-операторов нулевого порядка, следует из условия (а).

4. Аналогично для любого $l > 0$ невырождена матрица

$$(\Box_{\xi,\beta}), \quad \xi \in Z_{j,l}, \;\; j > 0, \quad \beta \in B_{i,l}, \;\; i \geq 0. \tag{8}$$

Заметим, что обе координаты любого элемента из Z положительны. Поэтому число $\rho_{k,0}$ совпадает с количеством элементов в подмножестве $B_{k,0}$. Из первого равенства (5) следует, что множество B имеет m элементов с нулевой второй координатой. Обозначим их через $\beta_1, \ldots, \beta_m$. Аналогично доказывается, что множество B имеет m элементов с нулевой первой координатой. Обозначим эти элементы через $\beta_1^1, \ldots, \beta_m^1$. Каждому элементу $\beta \in B$ поставим в соответствие элемент $\nabla_\beta \in G$, определенный условиями:

А) элементы $\nabla_{\beta_1}, \ldots, \nabla_{\beta_m}$ образуют базис модуля G_0;

Б) для любого $\xi \in Z$ имеем

$$\sum_{\beta \prec \xi} \Box_{\xi,\beta}(\nabla_\beta) = 0. \tag{9}$$

Используя (9) и невырожденность матриц (8) при $l > 0$, любой элемент ∇_β можно выразить через элементы $\nabla_{\beta_1}4$, $c_2(\beta_1) < c_2(\beta)$. Таким образом, элементы $\nabla_\beta \in G$, $\beta \in B$, однозначно определяются базисом модуля G_0 и набором скалярных D-операторов $\Box_{\xi,\beta}$. В частности, имеем

$$\nabla_{\beta_i^1} = \sum_{j=1}^{m} \Delta_{ij}(\nabla_{\beta_j}), \quad i = \overline{1,\, m}, \tag{10}$$

где Δ_{ij} — некоторые скалярные D-операторы.

Выберем какой-либо базис $f_1, \ldots, f_m$ модуля F_0 и определим искомый обратимый D-оператор Δ условием

$$\Delta(f_i) = \nabla_{\beta_i^1}, \quad i = \overline{1,\, m}. \tag{11}$$

Из (10) следует, что (Δ_{ij}) есть матрица скалярных D-операторов, определяющая D-оператор Δ. Аналогично

$$\nabla_{\beta_j} = \sum_{i=1}^{m} \Delta_{ji}^{-1}(\nabla_{\beta_i^1}), \quad j = \overline{1,\, m}. \tag{12}$$

D-Оператор с матрицей (Δ_{ji}^{-1}) есть обратный к Δ.

Таким образом, обратимый D-оператор Δ из D-порожденного модуля F в D-порожденный модуль G однозначно определяется своей d-схемой квадратов, выбором скалярных D-операторов $\square_{\xi,\beta}$, $\xi \in Z$, $\beta \in B$, и выбором базисов модулей G_0 и F_0. При этом D-операторы $\square_{\xi,\beta}$ определяются обратимым D-оператором Δ неоднозначно. Действительно, умножим слева каждый скалярный D-оператор $\square_{\xi,\beta}$ с фиксированным $\xi \in Z$ и всевозможными $\beta \in B$ на одну и ту же ненулевую функцию. Получим другой набор D-операторов $\square_{\xi,\beta}$, $\xi \in Z$,$\beta \in B$. Однако решения ∇_β, $\beta \in B$, новой и старой систем уравнений (9) будут совпадать. А значит, взаимно обратные D-операторы Δ и Δ^{-1} не меняются. Аналогично, изменив нумерацию элементов базисов модулей G_0 и F_0, получим другие базисы, соответствующие той же паре обратимых D-операторов Δ и Δ^{-1}.

Пусть $\Delta\colon\ F \to G$ — обратимый D-оператор, $L = \operatorname{ord}\Delta$, а $K = \operatorname{ord}\Delta^{-1}$. Для $k,\, l \geq 0$ обозначим через $G_{k,l}$ подмодуль

$$\frac{G_l \cap \Delta(F_k) + G_{l-1}}{G_{l-1}}$$

модуля G_l/G_{l-1}. Так как D-оператор Δ коммутирует с порождающим оператором D, то факторотображение (2) отображает $G_{k,l}$ в $G_{k+1,l+1}$. Обозначим

$$\mathcal{H}_{k,l,s} = \{\alpha \in G_{k,l}\colon\ D^s\alpha \in G_{k+s-1,l+s}\}\,, \quad k,\, l \geq 0, \quad s > 0.$$

d-Регулярную точку $t \in M$ обратимого D-оператора Δ будем называть *s-регулярной*, если в некоторой окрестности этой точки модули $\mathcal{H}_{k,l,s}$ имеют постоянную размерность при $0 \leq k \leq K$, $0 \leq l \leq L$ и $0 < s \leq \min\{k,\, l\}$.

Теорема 2 ([5, 7]). Пусть F и G — D-порожденые модули, причем $F_0 \simeq A^m \simeq G_0$. Тогда:

а) для заданных d-схемы квадратов и ее m-таблицы, а также скалярных D-операторов $\square_{\xi,\beta}$, $\xi \in Z$, $\beta \in B$, удовлетворяющих условиям 1–4, и базисов модулей G_0 и F_0 существует единственный обратимый D-оператор из F в G, определенный соотношениями (10)–(11);

б) для любого обратимого D-оператора $\Delta\colon\ F \to G$ существуют такие скалярные D-операторы $\square_{\xi,\beta}$, $\xi \in Z$, $\beta \in B$, удовлетворяющие условиям 1–4, и базисы модулей G_0 и F_0, что в окрестности s-регулярной точки D-оператор Δ имеет вид (10)–(11).

Теорема 3 ([5, 7]). Множество d-регулярных точек и множество s-регулярных точек являются открытыми всюду плотными множествами в M.

5. Основные результаты

Обратимый D-оператор, d-схема которого состоит из одного квадрата, будем называть *одноклеточным*.

Так как d-схема обратного D-оператора Δ^{-1} получается из d-схемы D-оператора Δ зеркальным отражением относительно биссектрисы первой четверти, то обратный D-оператор к одноклеточному также является одноклеточным (см. первую d-схему на рис. 1).

Теорема 4. Пусть F и G — D-порожденные модули, причем $F_0 \simeq A^m \simeq G_0$. Для любого одноклеточного D-оператора $\Delta\colon\ F \to G$ существуют базисы модулей G_0 и F_0, в которых матрица Δ имеет блочный вид

$$\begin{pmatrix} 1 & \square \\ 0 & E \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где $\square$ — строка, составленная из скалярных D-операторов $\square_{\xi,\beta}$ D-оператора Δ (см. теорему 2), 0 — столбец нулевых D-операторов, E — единичная матрица. Максимальный порядок D-операторов из строки $\square$ совпадает с размером квадрата d-схемы Δ.

Теорема 5. Пусть F и G — D-порожденые модули, причем $F_0 \simeq A^m \simeq G_0$. Любой обратимый D-оператор $\Delta\colon\ F \to G$ в окрестности s-регулярной точки представляет собой композицию одноклеточных. Минимальное количество одноклеточных D-операторов в такой композиции равно количеству квадратов d-схемы D-оператора Δ.

Из сформулированных результатов и доказательства теоремы 5 получаем следующий *алгоритм разложения обратимых D-операторов* в виде композиции одноклеточных.

Этап 1. Находим d-регулярные точки и таблицы чисел $d_{k,l}$, $\varkappa_{k,l}$ и $\rho_{k,l}$. Строим d-схему квадратов.

Этап 2. Находим s-регулярные точки и наборы скалярных D-операторов $\square_{\xi,\beta}$. Фиксируем s-регулярную точку t и базисы модулей G_0 и F_0 в ее окрестности.

Этап 3. В окрестности s-регулярной точки t находим последовательность одноклеточных D-операторов следующим образом:

1) находим k_0 — минимальное значение первой координаты элементов Z;

2) находим i_0 — максимальный из номеров i, для которых $B_{k_0,i} \neq \emptyset$;

3) выбираем такие элементы $\beta_0 \in B_{k_0,i_0}$ и $\xi_0 \in Z_{k_0,l_0}$, что $\square_{\xi_0,\beta_0}(t) \neq 0$;

4) выбираем такой элемент $\nabla_{\beta_0} \in \Delta(F_{k_0}) \cap G_{i_0}$ и базис $\nabla_{\beta_1^1}, \ldots, \nabla_{\beta_m^1}$ модуля $\Delta(F_0)$, что соотношение (9) для ξ_0 имеет вид

$$\nabla_{\beta_1^1} + \sum_{j=2}^{m} \square_{\xi_0,\beta_j^1}(\nabla_{\beta_j^1}) - \nabla_{\beta_0} = 0.$$

5) строим одноклеточный D-оператор Δ_1 вида (13), где $\square = \left(\square_{\xi_0,\beta_2^1},\ \ldots,\ \square_{\xi_0,\beta_m^1}\right)$;

6) если D-оператор $\Delta \circ \Delta_1$ не является одноклеточным, то заменяем Δ на $\Delta \circ \Delta_1$ и повторяем этапы 1–3 для этого D-оператора; в противном случае получаем набор одноклеточных D-операторов, композиция которых совпадает с исходным оператором.

Пример 3. Применение приведенного алгоритма к оператору Δ из примера 1 дает следующее разложение в области $t \neq -1$:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -(t+1) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -(t+1)D \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{t+1}D & 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{t+1}D & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & D & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{t+1} & 0 \\ 0 & \dfrac{t}{t+1} & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & D \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Доказательство теоремы 4

Любая m-таблица d-схемы, состоящей из одного квадрата, имеет вид, указанный на рис. 1, причем $m \geq 2$. Действительно, если нижний левый угол единственного квадрата располагается на ненулевой строке или столбце, то для этой строки (столбца) не выполняется условие (4). Поэтому нижний левый угол квадрата может располагаться только в точке $(0,\ 0)$, а тогда верхний правый угол квадрата располагается в точке $(r,\ r)$, где r — размер квадрата. Опять же из условия (4) следует, что на прямых $k = r$ и $l = r$ должны лежать по одной единице. Если единица лежит, например, в точке $(k_0,\ r)$ и $k_0 > 0$, то условие (4) не выполняется для $k = k_0$. Следовательно, единицы лежат в точках $(0,\ r)$ и $(r,\ 0)$, а вне точек $(r,\ r)$, $(0,\ r)$, $(r,\ 0)$, $(0,\ 0)$ располагаются нули. Наконец, из условия (5) следует, что $\rho_{0,0} = m - 1$. Так как в точке $(0,\ 0)$ лежит нижний левый угол квадрата, то $m - 1 \geq 1$.

Для построения обратимого оператора, соответствующего данной m-таблице используем изложенный выше алгоритм (см. разд. 4). В данном случае точка со значением -1 только одна, ее координаты $(r,\ r)$, и ей соответствует единственный элемент множества Z, который мы обозначим ξ. Точкам $(0,\ r)$, $(r,\ 0)$ и $(0,\ 0)$ соответствуют $m+1$ элемент множества B. Обозначим их через $\beta_1, \ldots, \beta_{m+1}$ с учетом следующего соответствия между ними и координатами:

$$\beta_1 = (0,\ r), \quad \beta_2 = \ldots = \beta_m = (0,\ 0), \quad \beta_{m+1} = (r,\ 0).$$

Для данной d-схемы упростим введенные ранее обозначения следующим образом:

$$\Box_j = \Box_{\xi,\beta_j}, \quad \nabla_j = \nabla_{\beta_j}, \quad j = \overline{1,\ m{+}1}.$$

Согласно условиям 1–4 и рис. 1, $\Box_1$ и $\Box_{m+1}$ — ненулевые скалярные D-операторы нулевого порядка (ненулевые функции), $\Box_2, \ldots, \Box_m$ — D-операторы порядка не выше r (D-оператор, соответствующий нижнему левому углу квадрата имеет порядок ровно r, остальные — меньше r). Так как квадрат d-схемы один, система (9) состоит из одного уравнения вида

$$\sum_{i=1}^{m+1} \Box_i(\nabla_i) = 0. \tag{14}$$

По построению, $\nabla_1, \ldots, \nabla_m$ — базис модуля G_0, $\nabla_{m+1}, \nabla_2, \ldots, \nabla_m$ — базис модуля $\Delta(F_0)$. Учитывая, что $\Box_1$ и $\Box_{m+1}$ — ненулевые функции, заменим базисные элементы ∇_1 на $\Box_1(\nabla_1)$ и ∇_{m+1} на $-\Box_{m+1}(\nabla_{m+1})$. Получим другие базисы модулей G_0 и $\Delta(F_0)$, элементы которых мы будем по-прежнему обозначать $\nabla_1, \ldots, \nabla_{m+1}$. Тогда уравнение (14) принимает вид

$$\nabla_1 + \sum_{i=2}^{m} \Box_i(\nabla_i) - \nabla_{m+1} = 0.$$

Используя это уравнение, выразим элементы $\nabla_{m+1}, \nabla_2, \ldots, \nabla_m$ через элементы $\nabla_1, \ldots, \nabla_m$. Получим матрицу обратимого D-оператора Δ вида (13), где $\Box = (\Box_2,\ \ldots,\ \Box_m)$. В заключение заметим, что D-оператор Δ изоморфно отображает модуль F_0 в модуль $\Delta(F_0)$. Поэтому замена базиса $\Delta(F_0)$ означает замену базиса F_0. Таким образом, для достижения (13) мы соотвествующим образом выбрали базисы модулей G_0 и F_0.

7. Доказательство теоремы 5

Рассмотрим d-схему квадратов обратимого D-оператора $\Delta\colon\ F \to G$, а также соответствующий набор скалярных D-операторов $\Box_{\xi,\beta}$, $\xi \in Z$, $\beta \in B$, удовлетворяющих условиям 1–4, и базисы модулей G_0 и F_0 (см. теорему 2). Обозначим через $z_{k,l}$ и $b_{k,l}$ — количество элементов в $Z_{k,l}$ и $B_{k,l}$ соответственно. Пусть k_0 — минимальное значение первой координаты элементов Z. Тогда $k_0 > 0$, так как обе координаты любого элемента из Z положительны. Из определения m-таблицы d-схемы квадратов следует, что

$$\rho_{j,l} = b_{j,l} - z_{j,l}, \quad j \geq 0, \quad l \geq 0. \tag{15}$$

С учетом этого соотношения и равенства $z_{k,l} = 0$, верного при $k < k_0$, второе равенство в (4) при $0 < k < k_0$ переписывается в виде

$$\sum_{l=0}^{\infty} b_{k,l} = 0.$$

А так как по определению $b_{k,l} \geq 0$, то $b_{k,l} = 0$ для всех k и l из последней суммы, т.е. при $0 < k < k_0$, $l \geq 0$.

Поскольку $z_{k_0,l} > 0$ для некоторого l, из (4) и (15) следует, что не все числа $b_{k_0,i}$, $i \geq 0$, нулевые. Среди номеров i, удовлетворяющих условию $b_{k_0,i} \neq 0$, выберем максимальный. Обозначим его i_0. Выберем элемент $\beta_0 \in B_{k_0,i_0}$. Рассмотрим какую-либо s-регулярную точку $t \in M$ и матрицу (7), соответствующую номеру $k = k_0$. Условие 4 означает, что эта матрица невырождена в точке t. Поэтому столбец, соответствующий элементу β_0, ненулевой. Выберем такой элемент $\xi_0 \in Z_{k_0,l_0}$, что $\Box_{\xi_0,\beta_0}(t) \neq 0$. Из условия 1 следует, что $\beta_0 \prec \xi_0$, а значит, $i_0 < l_0$.

Так как $b_{k,l} = 0$ при $k_0 > k > 0$, и $b_{k_0,i} = 0$ при $i > i_0$, то соотношение (9) для ξ_0 можно представить в виде

$$\sum_{\beta \in B_{0,l_0}} \Box_{\xi_0,\beta}(\nabla_\beta) + \sum_{\beta \in B_{0,l},\ l<l_0} \Box_{\xi_0,\beta}(\nabla_\beta) + \sum_{\beta \in B_{k_0,l},\ l \leq i_0} \Box_{\xi_0,\beta}(\nabla_\beta) = 0. \tag{16}$$

Первая сумма этого соотношения лежит в $\Delta(F_0) \cap G_{l_0}$ и не лежит в G_{l_0-1}, иначе условие 4 для $l = l_0$ не выполняется. Элементы ∇_β, $\beta \in B_{0,l}$, $l < l_0$, из второй суммы в (16) лежат в $\Delta(F_0) \cap G_{l_0-1}$. Наконец, из условия 1 следует, что D-операторы $\Box_{\xi_0,\beta}$ из третьей суммы в (16) нулевого порядка, так как для них $c_1(\beta) = c_1(\xi_0)$. Поэтому третья сумма лежит в $\Delta(F_{k_0}) \cap G_{i_0}$ и не равна нулю, иначе не выполняется условие 3 для $k = k_0$. Обозначим

$$\tilde{\nabla} = - \sum_{\beta \in B_{k_0,l},\ l \leq i_0} \Box_{\xi_0,\beta}(\nabla_\beta). \tag{17}$$

Напомним (см. доказательство теорем 1 и 2 в [5, 7]), что для всех $k \geq 0$, $l \geq 0$ множество $B_{k,l}$ отождествляется с множеством базисных элементов фактор-модуля

$$\mathcal{B}_{k,l} = \frac{G_l \cap \Delta(F_k)}{G_l \cap \Delta(F_{k-1}) + G_{l-1} \cap \Delta(F_k) + D(G_{l-1} \cap \Delta(F_{k-1}))},$$

а элемент ∇_β вводится как элемент модуля $G_l \cap \Delta(F_k)$, фактор-элемент которого есть базисный элемент модуля $\mathcal{B}_{k,l}$, соответствующий элементу $\beta \in B_{k,l}$. В частности, поскольку $\beta_0 \in B_{k_0,i_0}$, то фактор-элемент элемента ∇_{β_0} есть базисный элемент модуля $\mathcal{B}_{k_0,i_0}$.

Заменим ∇_{β_0} на $\tilde{\nabla}$ и оставим неизменными остальные элементы ∇_β, $\beta \in B$, $\beta \neq \beta_0$. Так как $\Box_{\xi_0,\beta_0}(t) \neq 0$, то набор фактор-элементов элементов ∇_β, $\beta \in B_{k_0,i_0}$, $\beta \neq \beta_0$, и $\tilde{\nabla}$ будет новым базисом модуля $\mathcal{B}_{k_0,i_0}$.

Выберем такой базис $\nabla_{\beta_1^1}, \ldots, \nabla_{\beta_m^1}$ модуля $\Delta(F_0)$, что $\nabla_{\beta_2^1}, \ldots, \nabla_{\beta_s^1}$ есть базис модуля $\Delta(F_0) \cap G_{l_0-1}$, а

$$\nabla_{\beta_1^1} = \sum_{\beta \in B_{0,l_0}} \Box_{\xi_0,\beta}(\nabla_\beta). \tag{18}$$

Элементы $\Delta^{-1}(\nabla_{\beta_1^1}), \ldots, \Delta^{-1}(\nabla_{\beta_m^1})$ образуют новый базис модуля F_0. При переходе от старых базисов модулей F_0 и $\mathcal{B}_{k_0,i_0}$ к новым базисам указанного типа меняются не только элементы ∇_β, но и скалярные D-операторы $\Box_{\xi,\beta}$. Для простоты будем использовать те же самые обозначения, что и раньше. Учитывая (17) и (18), а также то, что элементы ∇_β из второй суммы в (16) лежат в $\Delta(F_0) \cap G_{l_0-1}$, а значит, принадлежат набору $\nabla_{\beta_2^1}, \ldots, \nabla_{\beta_s^1}$, перепишем соотношение (16) в виде

$$\nabla_{\beta_1^1} + \sum_{j=2}^{s} \Box_{\xi_0,\beta_j^1}(\nabla_{\beta_j^1}) - \nabla_{\beta_0} = 0. \tag{19}$$

Рассмотрим подмодуль модуля F_{k_0}:

$$F_0^1 = \operatorname{span}_A \left\{\Delta^{-1}(\nabla_{\beta_0}),\ \Delta^{-1}(\nabla_{\beta_2^1}),\ \ldots,\ \Delta^{-1}(\nabla_{\beta_m^1})\right\},$$

а также соответствующий ему D-порожденный модуль F^1 и D-оператор $\Delta_1\colon F^1 \to F$, который в указанных базисах F_0^1 и F_0 имеет матрицу (13), где

$$\Box = \left(\Box_{\xi_0,\beta_2^1},\ \ldots,\ \Box_{\xi_0,\beta_s^1},\ 0,\ \ldots,\ 0\right). \tag{20}$$

Из теоремы 4 следует, что D-оператор Δ_1 одноклеточный, а значит, обратимый.

Покажем, что количество квадратов d-схемы композиции $\Delta \circ \Delta_1$ на 1 меньше количества квадратов d-схемы обратимого D-оператора Δ. Действительно, матрица обратимого D-оператора Δ определяется соотношениями (10), где $\nabla_{\beta_1}, \ldots, \nabla_{\beta_m}$ — заданный базис модуля G_0, а $\nabla_{\beta_1^1}, \ldots, \nabla_{\beta_m^1}$ — выбранный базис модуля $\Delta(F_0)$. Для вычисления компонент матрицы обратимого D-оператора $\Delta \circ \Delta_1$ используется тот же набор элементов ∇_β, кроме ∇_{β_0}, и тот же набор скалярных D-операторов $\Box_{\xi,\beta}$, кроме $\Box_{\xi_0,\beta}$, $\beta \prec \xi_0$. Таким образом, количество элементов и в множестве B, и в множестве Z для композиции $\Delta \circ \Delta_1$ на единицу меньше, чем для Δ. Поскольку каждому элементу Z соответствует один квадрат d-схемы, количество квадратов d-схемы композиции $\Delta \circ \Delta_1$ на единицу меньше количества квадратов d-схемы Δ.

Применяя приведенные рассуждения к обратимому D-оператору $\Delta \circ \Delta_1$, а затем последовательно к получающимся композициям с одноклеточными D-операторами $\Delta_2, \ldots, \Delta_k$, приходим к обратимому D-оператору $\Delta_0 = \Delta \circ \Delta_1 \circ \ldots \circ \Delta_k$, d-схема которого состоит из одного квадрата. По теореме 4 D-оператор Δ_0 одноклеточный. Поэтому $\Delta = \Delta_0 \circ \Delta_k^{-1} \circ \ldots \circ \Delta_1^{-1}$ есть композиция одноклеточных. Теорема 5 доказана.

Заключение

Отметим, что композиция двух одноклеточных D-операторов, которые в соответствующих базисах имеют вид (13) с $\Box = \Box_a$ и $\Box = \Box_b$ соответственно, есть одноклеточный D-оператор вида (13) с $\Box = \Box_a + \Box_b$. Поэтому количество одноклеточных D-операторов в разложении обратимого D-оператора может быть и больше количества квадратов его d-схемы. В теореме 5 идет речь только о минимальном количестве одноклеточных D-операторов в разложении.

Доказательство теоремы 5 и алгоритм разложения обратимых D-операторов в виде композиции одноклеточных из п. 5 существенно упрощаются, если рассматривать отображения более общих фильтрованных модулей, образующие которых лежат не только в G_0, но и в G_i, $i > 0$. Действительно, построенный одноклеточный D-оператор Δ_1 (см. доказательство и алгоритм) действует из модуля F^1 в модуль F. Образующие $\Delta^{-1}(\nabla_{\beta_2^1}), \ldots, \Delta^{-1}(\nabla_{\beta_m^1})$ модуля F^1 лежат в $F_0^1 \cap F_0$, а образующий $\Delta^{-1}(\nabla_{\beta_0})$ — в $F_0^1 \cap F_{k_0}$.

Модули F и F^1 совпадают и как модули, и как множества, но при этом отличаются фильтрацией. Переход от Δ к $\Delta \circ \Delta_1$ означает, в частности, смену фильтрации в F. Но при смене фильтрации меняется d-схема квадратов. Поэтому этапы 1 и 2 алгоритма приходится выполнять для оператора $\Delta \circ \Delta_1$.

Однако примеры применения алгоритма показывают, что сдвиг фильтрации при переходе от Δ к $\Delta \circ \Delta_1$ и этапы 1 и 2 для $\Delta \circ \Delta_1$ выполнять не обязательно. Достаточно последовательно преобразовывать соотношения (9) к виду (19) и строить одноклеточные D-операторы вида (13), (20). Для строгого обоснования этого варианта алгоритма необходимо обобщить результаты работ [4, 5, 6, 7] и этой работы на случай отображений фильтрованных модулей, образующие которых лежат не только в G_0, но и в G_i, $i > 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 16-07-01153).

Список литературы

1. Громов М. Дифференциальные соотношения с частными производными: пер. с англ. М.: Мир, 1990. 536 с. [Gromov M. Partial differential relations. B.; N.Y.: Springer, 1986. 363 p.].
2. Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986. 336 с.
3. Четвериков В.Н. Метод линеаризации для решения задач плоскостности и поиска оператора совместности // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42, № 10. С. 1405–1415.
4. Четвериков В.Н. Классификация и конструирование обратимых линейных дифференциальных операторов на одномерном многообразии // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 7. С. 105–127. DOI: 10.7463/0714.0718107
5. Четвериков В.Н. Классификация и конструирование обобщенных обратимых дифференциальных операторов с одной независимой переменной // Математика и математическое

моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. №4. С. 13–40. DOI: 10.7463/mathm.0415.0812952

6. Четвериков В.Н. Анализ и синтез обобщенных обратимых дифференциальных операторов с одной независимой переменной // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, № 11. С. 1534-1544. DOI: 10.1134/S037406411511014X
7. Chetverikov V.N. Invertible linear ordinary differential operators // J. of Geometry and Physics. 2017. Vol. 113. Pp. 10–27. DOI: 10.1016/j.geomphys.2016.06.014
8. Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства: пер. с англ. М.: Мир, 1970. 442 с. [Husemoller D. Fibre bundles. 2nd ed.. N.Y.: Mc-Graw Hill, 1966. 300 p.].
9. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. 8-е изд. М.: Наука. 1965. 431 с.

Mathematics & Mathematical Modelling
Electronic journal
http://mathmelpub.ru ISSN 2412-5911

Mathematics and Mathematical Modeling, 2018, no. 4, pp. 45–61.
DOI: **10.24108/mathm.0418.0000138**
Received: 21.08.2018

Invertible Linear Ordinary Differential Operators Represented as a Composition of the Simplest Operators

Chetverikov V. N.[1,*]
[*]chetverikov.vl@yandex.ru
[1]Bauman Moscow State Technical University, Russia

Keywords: invertible ordinary linear differential operators, transformation of control systems

This article is a sequel to the earlier articles, which describe the invertible ordinary differential operators and their generalizations. The generalizations are invertible mappings of filtered modules generated by one differentiation, and are called invertible D-operators. In particular, invertible ordinary linear differential operators, invertible linear difference operators with periodic coefficients, maps defined by unimodular matrices, and C-transformations of control systems are invertible D-operators. C-Transformations are those invertible transformations for which the variables of one system are expressed in terms of the variables of the other system and their derivatives.

In the article we consider the invertible D-operators whose inverses are D-operators of the same type. In previous papers, a classification of invertible D-operators was obtained. Namely, a table of integers was associated to each invertible D-operator. These tables were described in a clear elementary-geometric language. Thus, to each invertible D-operator one assigns an elementary-geometric model, which is called a d-scheme of squares. The class of invertible D-operators having the same d-scheme was also described.

In this paper, the invertible D-operators whose d-schemes consist of a single square are called unicellular. It is proved that any unicellular operator in some bases is given by an upper triangular matrix that differs from the identity matrix only by the first row. The main result is representation of the arbitrary invertible D-operator as a composition of unicellular operators. The minimum number of unicellular operators in such a composition is equal to the number of squares of the d-scheme of the original D-operator. As in previous papers, the used method is based on the description of d-schemes in the language of spectral sequences of algebraic complexes.

The results obtained can be useful in the transformation and classification of control systems, in particular to describe flat systems.

References

1. Gromov M. *Partial differential relations*. B.; N.Y.: Springer, 1986. 363 p. (Russ. ed.: Gromov M. *Differentsial'nye sootnosheniia s chastnymi proizvodnymi*. Moscow: Mir Publ., 1990. 536 p.).
2. Vinogradov A.M., Krasil'schik I.S., Lychagin V.V. *Vvedenie v geometriyu nelinejnykh differentsial'nykh uravnenij* [Introduction to the geometry of nonlinear differential equations]. Moscow: Nauka Publ., 1986. 336 p. (in Russian).
3. Chetverikov V.N. Linearization method for the flatness problem and for finding the compatibility operator. *Differential Equations*, 2006, vol. 42, no. 10, pp. 1479–1489. DOI: 10.1134/S0012266106100120
4. Chetverikov V.N. Classification and construction of invertible linear differential operators on a one-dimensional manifold. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2014, no. 7, pp. 105–127. DOI: 10.7463/0714.0718107 (in Russian)
5. Chetverikov V.N. Classification and construction of generalized invertible linear differential operators with one independent variable. *Matematika i matematicheskoe modelirovanie* [Mathematics & Mathematical Modelling], 2015, no. 4, pp. 13–40. DOI: *10.7463/mathm.0415.0812952* (in Russian)
6. Chetverikov V.N. Analysis and synthesis of generalized invertible differential operators with one independent variable. *Differential Equations*, 2015, vol. 51, no. 11, pp. 1529–1539. DOI: 10.1134/S0012266115110142
7. Chetverikov V.N. Invertible linear ordinary differential operators. *J. of Geometry and Physics*, 2017, vol. 113, pp. 10–27. DOI: 10.1016/j.geomphys.2016.06.014
8. Husemoller D. *Fibre bundles*. 2nd ed.. N.Y.: Mc-Graw Hill, 1966. 300 p. (Russ. ed.: Husemoller D. *Rassloennye prostranstva*. Moscow: Mir Publ., 1970. 442 p.).
9. Kurosh A.G. Kurs vysshej algebry [Course of higher algebra]. 8th ed. Moscow: Nauka Publ., 1965. 431 p. (in Russian).