Математика и Математическое моделирование
Сетевое научное издание
http://mathmelpub.ru ISSN 2412-5911

Ссылка на статью:
// Математика и математическое моделирование. 2018. № 6. С. 11–21.
DOI: 10.24108/mathm.0618.0000123
Представлена в редакцию: 30.06.2018
Исправлена: 02.12.2018

УДК 517.913

О вычислении первых интегралов систем ОДУ третьего порядка

Кавинов А. В.[1,*]

[*]alekseyvladimirovich@yandex.ru

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Статья посвящена численному способу получения первых интегралов систем ОДУ третьего порядка, основанному на факте интегрируемости инволютивного распределения. В предположении, что известно векторное поле, порождающее вместе с векторным полем правой части системы ОДУ инволютивное распределение размерности 2, разработанный способ позволяет в некоторых случаях получить выражение для первого интеграла системы в аналитическом виде.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения; векторное поле; первый интеграл; коммутатор

Введение

Поиск решений нелинейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

бывает подчас весьма сложен. Далеко не всегда удаётся получить общее решение системы (1) в аналитическом виде. В ряде случаев (в частности, при исследовании систем с хаотической динамикой) результаты численного моделирования являются главным источником информации о поведении системы.

В случае, когда найти аналитически общее решение системы (1) не удаётся, иногда, тем не менее, возможно указать её первый интеграл. В этом случае порядок системы может быть понижен.

Способов поиска первых интегралов, применимых к любой системе вида (1), также не известно; тем не менее, известен ряд результатов, позволяющих получить первый интеграл для некоторых частных случаев. Так, в [1, 2] получены выражения для первого интеграла в случае, когда известно векторное поле G, коммутирующее с векторным полем F системы (1), и $\operatorname{div} G \equiv \mathrm{const}$; в [3] приводится аналогичное выражение для случая, когда известно векторное поле G, совместимое с исходным и выполняются два дополнительных условия; авторы работы [4] получили первый интеграл для ещё одного частного случая систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Предложенный в [5, 6] способ позволяет в случае, если известны два функционально независимых первых интеграла совместимого с заданным векторного поля, свести задачу поиска первого интеграла системы 3-го порядка к решению дифференциального уравнения первого порядка.

Для всех перечисленных выше результатов характерны существенные ограничения, вызванные слишком жёсткими требованиями к системе и/или к известным сведениям о ней. Разработанный автором метод предъявляет к системе существенно более слабые требования, что позволяет применить его к более широкому классу систем. «Расплатой» за это является необходимость применения численного интегрования на одном из этапов поиска и, вследствие этого, риск неудачи из-за возможных ошибок интегрирования.

Предлагаемый способ позволяет при выполнении одного дополнительного условия найти численно первый интеграл нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. При этом решение определённой последовательности задач Коши позволяет приблизительно построить поверхность уровня первого интеграла, содержащую заданную точку пространства состояний системы. Полученные на этом этапе работы метода численные результаты являются исходными данными для следующего этапа, в результате которого в некоторых случаях возможно получение аналитического вида первого интеграла. При этом предполагаемый вид первого интеграла должен быть известен.

1. Некоторые предварительные сведения

Известно [7], что система (1) в некоторой окрестности любой неособой точки x_0 (т.е. $F(x_0) \neq 0$) имеет $n-1$ функционально независимых первых интегралов, т.е. в случае $n = 3$ таких первых интегралов имеется два.

Заметим, что в некоторой окрестности неособой точки x_0 существует диффеоморфизм $y = T(x)$, спрямляющий векторное поле $F(x)$ [7]. В новых переменных y система (1) примет вид

$$\dot{y}_1 = 1, \quad \dot{y}_2 = 0, \quad \dot{y}_3 = 0, \quad y = (y_1,\ y_2,\ y_3)^{\mathrm{T}} \in T(\Omega); \tag{2}$$

тогда можно, выбрав $H_1(y) = (0,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}$ и $H_2(y) = (0,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$, получить два линейно независимых векторных поля, коммутирующих со спрямлённым векторным полем $H(y) = (1,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}}$. Это означает, что в некоторой окрестности точки $T(x_0)$ их потоки коммутируют, т.е. для достаточно малых t и s

$$\Phi_t^H(\Phi_s^{H_1}(x_0)) = \Phi_s^{H_1}(\Phi_t^H(x_0)), \quad \Phi_t^H(\Phi_s^{H_2}(x_0)) = \Phi_s^{H_2}(\Phi_t^H(x_0)),$$

где через Φ^H, Φ^{H_1} и Φ^{H_2} обозначены потоки соответствующих векторных полей. Очевидно, что потоки этих векторных полей в исходных переменных x также будут коммутировать; это показывает, что существуют два линейно независимых векторных поля, каждое из которых коммутирует с $F(x)$ (следовательно, их коммутатор является линейной комбинацией этих векторных полей).

Пусть известно гладкое в каждой точке открытого множества Ω линейно независимое с F векторное поле $G(x) = (g_1(x),\ g_2(x),\ g_3(x))^{\mathrm{T}}$, причём система F, G инволютивна, т.е.

$$\forall x \in \Omega\ \det(F, G, [F, G]) = 0. \tag{3}$$

Известно, что в соответствии с теоремой Фробениуса [9] для инволютивной системы из k линейно независимых векторных полей существует $n-k$ функционально независимых первых интегралов этой системы. В нашем случае $n = 3$, $k = 2$, поэтому существует один функционально независимый общий первый интеграл системы (1) и системы

$$\dot{x} = G(x), \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

Заметим, что векторные поля F и G, удовлетворяющие условию (3), называют также совместимыми [5, 6, 8].

Сказанное выше означает, что существует некоторая функция $V\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, не являющаяся постоянной и удовлетворяющая в некоторой окрестности U точки x_0 условиям

$$L_F V = 0, \quad L_G V = 0, \tag{5}$$

т.е. постоянная на траекториях систем (1) и (4). Поверхность уровня этой функции, проходящая через точку x_0, является инвариантным относительно потоков рассматриваемых систем множеством.

Заметим также, что конкретные значения функции V в точках U и на соответствующих им поверхностях уровня не имеют значения. Можно приписать разным поверхностям уровня различные значения произвольным образом, поскольку выбор других значений приведёт лишь к получению другого первого интеграла, функционально зависимого с исходным.

Далее будет описан способ, позволяющий построить поверхности уровня $V(x)$ с помощью вычисления композиции потоков систем (1) и (4), а в некоторых случаях получить аналитическое выражение для первого интеграла.

2. Описание метода

Пусть $F(x) = (f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x))^{\mathrm{T}}$ — векторное поле рассматриваемой системы (1), $G(x) = (g_1(x),\ g_2(x),\ g_3(x))^{\mathrm{T}}$ — совместимое с ним на некотором открытом множестве $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ гладкое векторное поле, F и G линейно независимы, $x_0 \in \Omega$ — неособая точка F. Рассмотрим отображение $\Psi(t, s) = \Phi_s^G(\Phi_t^F(x))$. Очевидно, что для любых t и s, таких, что

$$\forall \tau \in [0,\ t]\ \sigma \in [0, s],\ \Psi(\tau, \sigma) \in U,$$

выполняется $V(\Psi(t, s)) = V(x_0)$. Выбрав значения $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_k$, $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k$, и $s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_m$, $0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_m$, можно вычислить сетку значений $\Psi(t_i, s_j)$,

$i = 0, \ldots, k$, $j = 0, \ldots, m$. Все точки этой сетки лежат на множестве уровня $V(x) = V(x_0)$ некоторого первого интеграла системы (заметим, что таких первых интегралов бесконечно много, но все они функционально зависимы). Известно [9], что в некоторой окрестности нуля $\Psi(t, s)$ порождает гладкую невырожденную поверхность, т.е. многообразие размерности 2.

Зная предполагаемый вид первого интеграла, можно, используя найденную при помощи численного интегрирования сетку значений, определить с помощью метода наименьших квадратов конкретный вид $V(x)$ для заданной точки x_0. При этом следует каким-либо образом выбрать некоторый конкретный первый интеграл из множества всех первых интегралов системы. Это можно сделать, например, зафиксировав один из коэффициентов в предполагаемом виде первого интеграла. Меняя x_0, можно получать разные выражения для $V(x)$. Сопоставляя эти выражения друг с другом, иногда можно найти глобальный первый интеграл системы.

Главным препятствием на пути применения описанного метода является необходимость знания аналитического выражения для совместимого векторного поля G — общих способов для поиска такого выражения не существует. Также некоторую сложность может представлять «угадывание» предполагаемого вида первого интеграла в случае, когда этот первый интеграл не является многочленом. Тем не менее, как будет показано в следующей главе, метод работоспособен в ряде случаев.

3. Примеры применения метода

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = y + z, \quad \dot{y} = -x, \quad \dot{z} = xz. \tag{6}$$

Можно заметить, что коммутатор векторного поля F правой части системы и векторного поля $G = (y,\ -x,\ 0)^{\mathrm{T}}$ равен $(0,\ -z,\ -yz)^{\mathrm{T}}$, причём $yF - (y + z)G + x[F, G] = 0$. Выберем начальную точку $x_0 = (0,\ 0,\ 1)$. Результат процедуры получения сетки значений $\Psi(t, s)$ представлен графически на рис. 1.

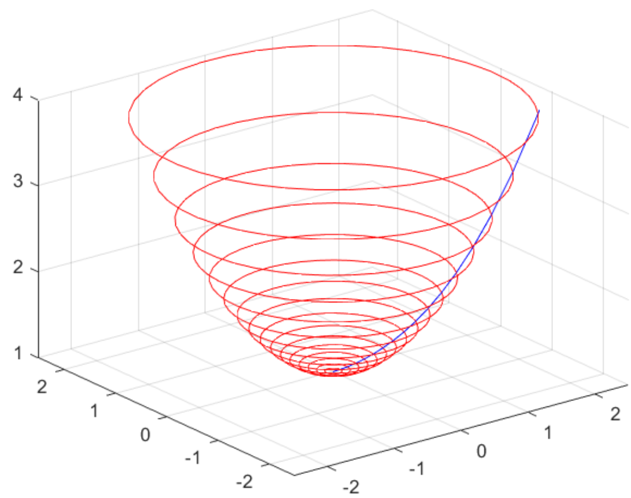

Рис. 1. Построенная поверхность уровня

При интегрировании были выбраны значения узлов сетки $t = 0$, $0{,}1$, $0{,}2$, $\ldots$, $1{,}6$, $s = 0$, $\frac{\pi}{20}$, $\frac{2\pi}{20}$, $\ldots$, 2π. Всего было вычислено $41 \cdot 17 = 697$ точек.

Синим цветом на рис. 1 показана траектория решения системы (6), красным цветом — траектории системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x, \quad \dot{z} = 0,$$

соответствующей векторному полю G. Из рисунка видно, что все эти траектории лежат на некоторой поверхности. Эта поверхность и есть поверхность уровня первого интеграла $V(x, y, z)$ системы (6).

Получим теперь на основе вычисленных координат точек поверхности приближенное аналитическое выражение для первого интеграла. Будем искать его в виде

$$V(x, y, z) = Ax + By + Cz + Dx^2 + Ey^2 + Fz^2 + Gxy + Hyz + Ixz, \tag{7}$$

где A, B, C, D, E, F, G, H, I — параметры, подлежащие определению. В выборе коэффициентов V существует произвол, поскольку умножив выражение из (7) на произвольную константу, получим другой первый интеграл.

Для вычисления параметров первого интеграла воспользуемся методом наименьших квадратов. Под решением задачи наменьших квадратов будем понимать нормальное псевдорешение системы линейных алгебраических уравнений

$$x_i A + y_i B + z_i C + x_i^2 D + y_i^2 E + z_i^2 F + x_i y_i G + y_i z_i H + x_i z_i I = v_0,$$

где v_0 — приписанное в точке x_0 искомой функции V значение. Припишем функции $V(x)$ в точке x_0 значение 1 (можно выбрать любое значение, кроме нулевого, поскольку для нулевого значения получим набор нулевых коэффициентов).

Решение линейной задачи наименьших квадратов

$$x_i A + y_i B + z_i C + x_i^2 D + y_i^2 E + z_i^2 F + x_i y_i G + y_i z_i H + x_i z_i I = 1, \quad i = 1, \ldots, 697,$$

где x_i, y_i, z_i — координаты i-й вычисленной точки, даёт значения коэффициентов

$$\begin{gathered} A = 4{,}08 \cdot 10^{-6}, \quad B = -6{,}17 \cdot 10^{-6}, \quad C = 1.00000133, \quad D = -0.50004183, \\ E = -0.50000879, \quad F = 2{,}6 \cdot 10^{-7}, \quad G = -5{,}47 \cdot 10^{-6}, \quad H = -1{,}349 \cdot 10^{-5}, \\ I = -1{,}486 \cdot 10^{-5}. \end{gathered}$$

Таким образом, можно предположить, что выражение для первого интеграла системы (6) есть

$$V(x, y, z) = z - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}.$$

Это предположение подтверждается непосредственным дифференцированием $V(x, y, z)$ в силу системы (6).

Первый интеграл при использовании описанного метода можно искать не только в виде многочлена. В целях демонстрации этого факта рассмотрим систему Лоренца

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = -xz + \rho x - y, \quad \dot{z} = xy - bz \tag{8}$$

со значениями параметров $\sigma = \frac{1}{2}$, $\rho = 0$, $b = 1$. Известно [6], что векторное поле правой части системы (8) совместимо с векторным полем $G(x, y, z) = (x,\ 2y,\ 2z)^{\mathrm{T}}$.

Предположим, что первый интеграл системы (8) имеет вид дробно-рациональной функции $\dfrac{P_m(x, y, z)}{Q_n(x, y, z)}$, где $P_m(x, y, z)$ и $Q_n(x, y, z)$ — многочлены некоторых степеней m и n. Припишем этому первому интегралу в некоторой точке значение C. Равенство

$$\frac{P_m(x, y, z)}{Q_n(x, y, z)} = C$$

может быть переписано в виде

$$P_m(x, y, z) - CQ_n(x, y, z) = 0,$$

после чего, зафиксировав максимальные степени m и n многочленов P_m и Q_n, коэффициенты многочлена $P_m(x, y, z) - CQ_n(x, y, z)$ можно найти методом наименьших квадратов.

Применяя процедуру метода для заданной начальной точки со значениями узлов сетки $t = 0,\ 0.1,\ 0.2,\ \ldots,\ 2$, $s = 0,\ 0.1,\ 0.2,\ \ldots,\ 2$, получим набор из 441 точки пространства. Для этих точек будем решать задачу наименьших квадратов (в том же смысле, что и в предыдущем примере):

$$\begin{gathered}A + x_iB + y_iD + z_iE + x_i^2F + y_i^2 + z_i^2G + x_iy_iH + y_iz_iI + x_iz_iJ + \\ + x_i^3K + y_i^3L + z_i^3M + x_i^2z_iN + x_i^2y_iP + x_iy_i^2Q + x_iz_i^2R + y_i^2z_iS + y_iz_i^2T + \\ + x_i^4U + y_i^4V + z_i^4W + x_i^2y_i^2X + y_i^2z_i^2Y + x_i^2z_i^2Z = 0, \quad i = 1,\ \ldots,\ 441,\end{gathered}$$

где x_i, y_i, z_i — координаты i-й вычисленной точки. Заметим, что один из не равных нулю коэффициентов в левой части равенства (в нашем случае это коэффициент при y_i^2) должен быть зафиксирован для определённости, причём его значение не должно быть равно нулю, иначе решением задачи наименьших квадратов будет нулевой набор коэффициентов, соответствующий нулевому «первому интегралу».

Для начальной точки $(1,\ 0,\ -1)$ получены коэффициенты

$$\begin{gathered}A = 1{,}0 \cdot 10^{-6}, \quad B = -4{,}0 \cdot 10^{-6} \quad D = 1{,}0 \cdot 10^{-6}, \quad E = 0, \quad F = 5{,}0 \cdot 10^{-6}, \quad G = 0{,}75, \\ H = I = J = 0, \quad K = -2{,}0 \cdot 10^{-6}, \quad L = M = 0, \quad N = 0{,}5, \quad P = Q = R = S = T = 0, \\ U = -0{,}249999, \quad V = W = X = Y = Z = 0,\end{gathered}$$

что даёт нам выражение для поверхности уровня первого интеграла, проходящей через точку $(1,\ 0,\ -1)$:

$$y^2 + \frac{3}{4}z^2 + \frac{1}{2}x^2z - \frac{1}{4}x^4 = 0. \tag{9}$$

Полученное описанным образом выражение может содержать ошибки, поскольку вычисляется приблизительно. Проверить точность вычисленных коэффициентов можно, продифференцировав функцию $v_1(x,y,z) = y^2 + \frac{3}{4}z^2 + \frac{1}{2}x^2 z - \frac{1}{4}x^4$ в силу системы (8) и подставив в полученную производную точку $M_1(1,\ 0,\ -1)$. В нашем случае имеем

$$\dot v_1\Big|_{(8)} = \frac{x^4}{2} - x^2 z - 2y^2 - \frac{3z^2}{2}, \quad \dot v_1\Big|_{(8),M_1} = 0.$$

Повторив процедуру метода для начальной точки $(-1,\ -1,\ -1)$, получим другие значения коэффициентов:

$$A = 0, \quad B = -1{,}0 \cdot 10^{-6}, \quad D = E = 0, \quad F = -1{,}0 \cdot 10^{-6}, \quad G = 0{,}5,$$
$$H = I = J = 0, \quad K = -1{,}0 \cdot 10^{-6}, \quad L = M = 0, \quad N = 1, \quad P = Q = R = S = T = 0,$$
$$U = -0{,}5, \quad V = W = X = Y = Z = 0.$$

Отсюда получаем выражение для поверхности уровня первого интеграла, проходящей через точку $(-1,\ -1,\ -1)$ в виде

$$y^2 + \frac{1}{2}z^2 + x^2 z - \frac{1}{2}x^4 = 0. \tag{10}$$

Поверхности уровня, описываемые уравнениями (9) и (10), показаны нарис. 2.

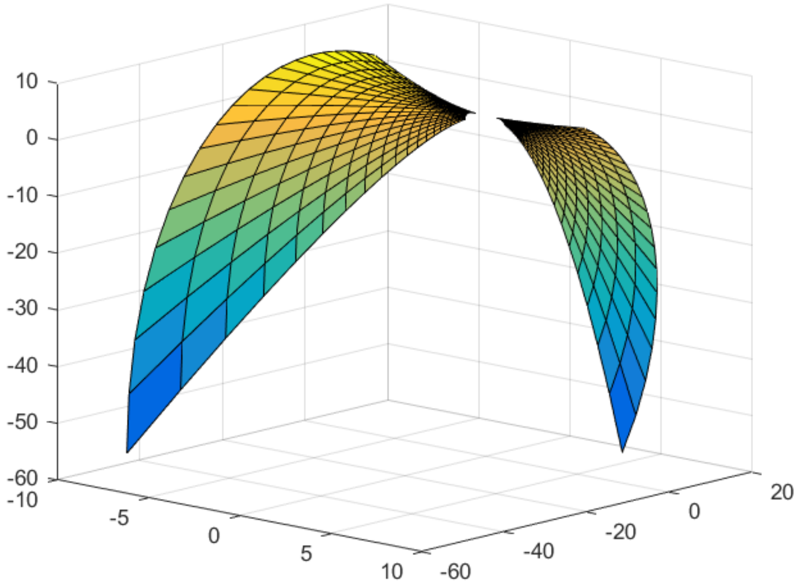

Рис. 2. Два подмножества поверхностей уровня, использованные при поиске первого интеграла системы Лоренца

По сделанному ранее предположению о виде первого интеграла левые части выражений (9) и (10) должны иметь вид $P_m(x,y,z) - CQ_n(x,y,z) = 0$ с разными значениями $C = C_1$ и $C = C_2$, но одними и теми же $P_m(x,y,z)$ и $Q_n(x,y,z)$. Вычитая левую часть (10) из левой части (9), получаем

$$(C_2 - C_1)Q_n(x,y,z) = \frac{1}{4}(z^2 + x^4 - 2x^2 z) = \frac{1}{4}(x^2 - z)^2.$$

Поскольку существует произвол в выборе «масштаба» константы C, примем $C_2 - C_1 = \dfrac{1}{4}$. Тогда

$$Q_n(x, y, z) = (x^2 - z)^2$$

и (из (9))

$$P_m(x, y, z) = C_1(x^2 - z)^2 + y^2 + \frac{3}{4}z^2 + \frac{1}{2}x^2 z - \frac{1}{4}x^4.$$

Константу C_1 можно также выбрать произвольно (при разном выборе C_1 будут получаться разные первые интегралы, но все они функционально зависимы). Выбрав $C_1 = \dfrac{1}{4}$, получим

$$P_m(x, y, z) = \frac{1}{4}(x^2 - z)^2 + y^2 + \frac{3}{4}z^2 + \frac{1}{2}x^2 z - \frac{1}{4}x^4 = y^2 + z^2.$$

Таким образом, первый интеграл рассматриваемой системы можно записать в виде

$$V(x, y, z) = \frac{y^2 + z^2}{(x^2 - z)^2},$$

что совпадает с результатом, приведённым в [6, 10].

Заключение

Описан численный способ получения первых интегралов систем ОДУ третьего порядка, применимый при условии, что известно векторное поле, порождающее вместе с векторным полем правой части системы ОДУ инволютивное распределение размерности два. Разработанный способ позволяет построить поверхности уровня первого интеграла рассматриваемой системы и приближенные выражения для первого интеграла системы в аналитическом виде.

Список литературы

1. Gonzalez-Gascon F. A global first integral for certain dynamical systems and related remarks // Lettere al Nuovo Cimento. 1977. Vol. 20, no. 2. Pp. 54–56. DOI: 10.1007/BF02790711
2. Gonzalez-Gascon F., Peralta-Salas D. Symmetries and first integrals of divergence-free $\mathbf{R}^3$ vector fields // Intern. J. of Non-Linear Mechanics. 2000. Vol. 35, no. 4. Pp. 589–596. DOI: 10.1016/S0020-7462(99)00043-8
3. Llibre J., Peralta-Salas D. A note on the first integrals of vector fields with integrating factors and normalizers // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA). 2012. Vol. 8. Art. no. 035. Pp. 1–9. DOI: 10.3842/SIGMA.2012.035
4. Yanxia Hu, Keying Guan Techniques for searching first integrals by Lie group and application to gyroscope system // Science in China. Ser. A: Mathematics. 2005. Vol. 48, no. 8. Pp. 1135–1143. DOI: 10.1360/04ys0141

5. Strelcyn J.-M., Wojciechowski S. A method of finding integrals for three-dimensional dynamical systems // Physics Letters A. 1988. Vol. 133, iss. 4-5. Pp. 207–212. DOI: 10.1016/0375-9601(88)91018-3
6. Wojciechowski S. A method of studying integrals of dynamical systems based on Frobenius' integrability theorem // Symmetries in Science III. / Ed. by B. Gruber, F. Iachello. N.Y.: Plenum Press, 1989. Pp. 493–503. DOI: 10.1007/978-1-4613-0787-7_29
7. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. 4-е изд. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000. 367 с.
8. Ollagnier J.M., Strelcyn J.-M. On first integrals of linear systems, Frobenius integrability theorem and linear representations of Lie algebras // Bifurcations of planar vector fields. Proceedings of a Meeting held in Luminy, France, Sept. 18–22, 1989. B.: Springer, 1990. Pp. 243–271. DOI: 10.1007/BFb0085396
9. Isidori A. Nonlinear control systems. 3rd ed. B.; N.Y.: Springer, 1995. 549 p.
10. Giacomini H., Neukirch S. Integrals of motion and the shape of the attractor for the Lorenz model // Physics Letters A. 1997. Vol. 227, no. 5-6. Pp. 309–318. DOI: 10.1016/S0375-9601(97)00077-7

Mathematics & Mathematical Modelling
Electronic journal
http://mathmelpub.ru ISSN 2412-5911

Mathematics and Mathematical Modeling, 2018, no. 6, pp. 11–21.
DOI: **10.24108/mathm.0618.0000123**
Received: 30.06.2018
Revised: 02.12.2018

On calculation of the first integrals for three-dimensional ODE systems

Kavinov A. V.[1,*]

[*]alekseyvladimirovich@yandex.ru

[1]Bauman Moscow State Technical University, Russia

Keywords: differential equations, vector field, first integral, Lie bracket

The search for solutions of nonlinear stationary systems of ordinary differential equations (ODE) is sometimes very complicated. It is not always possible to obtain a general solution in an analytical form. As a consequence, a qualitative theory of nonlinear dynamical systems has been developed. Its methods allow us to investigate the properties of solutions without finding a general solution. Numerical methods of investigation are also widely used.

In the case when it is impossible to find an analytically general solution of the ODE system, sometimes, nevertheless, it is possible to find its first integral. There is a number of known results that make it possible to obtain the first integral for certain special cases.

The article deals with the method for obtaining the first integrals of ODE systems of the third order, based on the fact of integrability of the involutive distribution.

The method proposed in the paper allows us to obtain the first integral of a nonlinear ODE system of the third order in the case when a vector field, which generates an involutive distribution of dimension 2 together with the vector field of the right-hand side of a given ODE system, is known. In this case, the solution of a certain sequence of Cauchy problems allows us to construct a level surface of the function of the first integral containing the given point of the state space of the system. Using the method of least squares, in a number of cases it is possible to obtain an analytic expression for the first integral.

The article gives examples of the method application to two ODE systems, namely to a simple nonlinear third-order system and to the Lorentz system with special parameter values. The article shows how the first integrals can be obtained analytically using the method developed for the two systems mentioned above.

References

1. Gonzalez-Gascon F. A global first integral for certain dynamical systems and related remarks. *Lettere al Nuovo Cimento*, 1977, vol. 20, no. 2, pp. 54–56. DOI: 10.1007/BF02790711

2. Gonzalez-Gascon F., Peralta-Salas D. Symmetries and first integrals of divergence-free $\mathbb{R}^3$ vector fields. *Intern. J. of Non-Linear Mechanics*, 2000, vol. 35, no. 4, pp. 589–596. DOI: 10.1016/S0020-7462(99)00043-8

3. Llibre J., Peralta-Salas D. A note on the first integrals of vector fields with integrating factors and normalizers. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA)*, 2012, vol. 8, art. no. 035, pp. 1–9. DOI: 10.3842/SIGMA.2012.035

4. Yanxia Hu, Keying Guan Techniques for searching first integrals by Lie group and application to gyroscope system. *Science in China. Ser. A: Mathematics*, 2005, vol. 48, no. 8, pp. 1135–1143. DOI: 10.1360/04ys0141

5. Strelcyn J.-M., Wojciechowski S. A method of finding integrals for three-dimensional dynamical systems. *Physics Letters A.*, 1988, vol. 133, iss. 4-5, pp. 207–212. DOI: 10.1016/0375-9601(88)91018-3

6. Wojciechowski S. A method of studying integrals of dynamical systems based on Frobenius' integrability theorem. *Symmetries in Science III*, Ed. by B. Gruber, F. Iachello. N.Y.: Plenum Press, 1989. Pp. 493–503. DOI: 10.1007/978-1-4613-0787-7_29

7. Arnol'd V.I. *Obyknovennye differetsial'nye uravneniia* [Ordinary differential equations]. 4th ed. Izhevsk: Reguliarnaia i khaoticheskaia dinamika Publ., 2000. 367 p. (in Russian).

8. Ollagnier J.M., Strelcyn J.-M. On first integrals of linear systems, Frobenius integrability theorem and linear representations of Lie algebras. *Bifurcations of Planar Vector Fields. Proceedings of a Meeting held in Luminy, France, Sept. 18–22, 1989*. B.: Springer, 1990. Pp. 243–271. DOI: 10.1007/BFb0085396

9. Isidori A. Nonlinear control systems. 3rd ed. B.; N.Y.: Springer, 1995. 549 p.

10. Giacomini H., Neukirch S. Integrals of motion and the shape of the attractor for the Lorenz model. *Physics Letters A*, 1997, vol. 227, iss. 5-6, pp. 309–318. DOI: 10.1016/S0375-9601(97)00077-7